BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

*

NGUYỄN THANH TÙNG

BÀI TOÁN BIÊN ĐỐI VỚI MỘT SỐ LỚP PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN SÓNG TRONG MIỀN KHÔNG TRƠN

Chuyên ngành: Phương trình Vi phân và Tích phân
Mã số: 62 46 01 03

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2017

.

Luận án được hoàn thành tại: Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. Vũ Trọng Lưỡng
GS. TSKH. Nguyễn Mạnh Hùng

Phản biện 1: PGS.TS. Nguyễn Sinh Bảy, Trường Đại học Thương Mại.

Phản biện 2: GS.TSKH. Nguyễn Minh Trí, Viện Toán học.

Phản biện 3: PGS.TS. Hoàng Quốc Toàn, Trường Đại học KHTN-ĐHQG Hà Nội.

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp trường tại Trường Đại học Sư phạm Hà Nội vào hồi .... giờ .... phút ngày ..... tháng ..... năm .....

Có thể tìm hiểu luận án tại Thư viện Quốc Gia, Hà Nội hoặc Thư viện Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

MỞ ĐẦU

1. Lịch sử vấn đề và lí do chọn đề tài

Các bài toán biên tuyến tính đối với phương trình, hệ phương trình đạo hàm riêng trong các miền với biên trơn đã được các nhà toán học nghiên cứu khá hoàn thiện ở nữa đầu thế kỷ XX. Các bài toán biên loại dừng trong các miền trơn đã được G. Fichera (1972), D. Ginbarg và N. Trudinger (1983), L. C. Evans (1998) nghiên cứu nhờ phép phân hoạch đơn vị để đưa bài toán đang xét về bài toán trong toàn không gian và nửa không gian. Các bài toán biên không dừng trong các hình trụ với đáy là miền có biên trơn được nghiên cứu nhờ phép biến đổi Laplace hoặc phép biến đổi Fourier để đưa về bài toán dừng với tham biến trong miền trơn.

Từ giữa thế kỷ XX, bài toán biên tổng quát đối với phương trình elliptic trong miền với biên kỳ dị đã được nghiên cứu, các kết quả quan trọng về tính đặt đúng của bài toán cũng như tính trơn và tiệm cận của nghiệm trong miền với các điểm nón trên biên đã nhận được từ công trình của V. A. Kondratiev (1977,1998). Tiếp theo, một số nhà toán học như P. Grisvard (1985), M. Dauge (1988), E. V. Frolove (1994), V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, J. Rossmann (1997, 2001) V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya (1988) đã dựa trên các phương pháp của V.A.Kondrat'ev để nghiên cứu các bài toán biên đối với các hệ dừng trong các miền với các điểm kỳ dị trên biên.

Cho đến những năm của thập niên 90 của thế kỷ XX, bởi các phương pháp như là phép biến đổi Fourier, phép biến đổi Laplace... chưa đủ mạnh để giúp chúng ta khẳng định những kết quả quan trọng của các bài toán không dừng trong các miền không trơn. Cuối thế kỷ XX, nhờ phương pháp cắt thiết diện, bài toán không dừng đã được xét trên một thiết diện như là một bài toán dừng trong các công trình của Nguyễn Mạnh Hùng cùng đồng sự. Với phương pháp này, bài toán không dừng với hệ số phụ thuộc thời gian đã được nghiên cứu, thể hiện ở tính đặt đúng của bài toán không dừng trong miền bất kỳ và biểu diễn tiệm cận của nghiệm gần điểm nón trên biên. Các kết quả về tính giải được, tính trơn của nghiệm suy rộng theo biến thời gian đối với bài toán biên ban đầu thứ nhất, thứ hai trong các trụ với đáy là miền với biên bất kỳ, đáy là miền chứa điểm nón, điểm góc cũng đã nhận được. Biểu diễn

tiệm cận của nghiệm gần điểm nón của bài toán biên tổng quát đối với hệ hyperbolic trong trụ với đáy là miền chứa điểm nón cũng đã nhận được sau đó. Nhìn lại, các kết quả đạt được của các bài toán không dừng mới chỉ xét trong các trụ hữu hạn có đáy là miền không trơn và trong trường hợp với đáy là miền chứa điểm không phải là điểm nón thì dáng điệu tiệm cận của nghiệm gần điểm kì dị là như thế nào. Đơn cử cho các kết quả của Nguyễn Mạnh Hùng cùng các cộng sự (2004, 2005), của Vũ Trọng Lưỡng cùng cộng sự (2011) nhận được sau đó đã nghiên cứu bài toán không dừng parabolic trong các trụ vô hạn. Tính chính quy của nghiệm của bài toán biên tổng quát trong trụ vô hạn với đáy chứa điểm nón được Nguyễn Mạnh Hùng và Nguyễn Thành Anh (2008) đưa ra khi xét bài toán biên ban đầu đối với hệ không dừng parabolic cấp hai trong trụ hữu hạn với đáy là đa giác.

Với những kết quả quan trọng của bài toán giá trị biên ban đầu đối với phương trình elliptic của các nhà khoa học V. A. Kondratiev, V. G. Maz'ya và B. A. Plamenevskii đạt được trong các miền trụ không trơn khác nhau như miền với điểm nón, miền với đáy là đa giác..., đã có một số công trình của Nguyễn Mạnh Hùng cùng các cộng sự đạt được về tính duy nhất nghiệm, tính chính quy, biểu diễn tiệm cận nghiệm gần điểm kỳ dị (điểm nón, điểm lùi). Đặc biệt, tính trơn của nghiệm suy rộng theo biến thời gian của bài toán giá trị biên ban đầu thứ nhất đối với phương trình hyperbolic bậc cao trong trụ vô hạn với biên bất kỳ của Nguyễn Mạnh Hùng (2007), trong công trình của Bùi Trọng Kim (2008), sự tồn tại duy nhất của nghiệm suy rộng của bài toán hỗn hợp thứ nhất đối với phương trình hyperbolic cấp cao trong trụ không trơn vô hạn đã được khẳng định.

Phương trình truyền sóng phi tuyến với cấu trúc tắt dần trên miền trơn bất kỳ mà trong đó là hệ đàn hồi với cấu trúc tắt dần đã được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm, nghiên cứu trong khoảng bốn thập kỉ trở lại đây. Đặc biệt quan tâm tới kết quả của Fan, Li và chen (2013) đã thu được sự tồn tại của nghiệm mềm trong các không gian Banach với hằng số tắt dần $\rho \geq 2$ và hàm phi tuyến f là hàm Lipschitz theo biến thứ hai. Năm 2014, Fan và Gao đã thu được biểu diễn tiệm cận của nghiệm của hệ đàn hồi với cấu trúc tắt dần trong không gian Banach.

Trước những kết quả đạt được đặt ra vấn đề nếu bổ sung hạng tử nhiễu phi tuyến vào phương trình hyperbolic nửa tuyến tính xét trong trụ không trơn vô hạn thì tính giải được của bài toán như thế nào; Thay vì miền với

điểm nón, điểm lùi, điểm góc... là miền với cạnh thì tính giải được, tính chính quy của nghiệm theo biến thời gian của bài toán biên ban đầu đối với phương trình hyperbolic sẽ ra sao. Ở khía cạnh khác, cách tiếp cận giải quyết bài toán biên ban đầu đối với phương trình hyperbolic trong miền có cạnh có giống như cách tiếp cận của cùng bài toán trong miền có điểm lùi, điểm nón không. Thêm nữa, trong quá trình nghiên cứu về hệ đàn hồi đối với cấu trúc tắt dần, chúng tôi nhận thấy rằng các kết quả đạt được về sự tồn tại, tính phân rã của nghiệm mềm của bài toán mới chỉ đạt được đối với lớp hàm phi tuyến có tính chất Lipschitz, các toán tử trong phương trình xét trên miền trơn. Chính từ những vấn đề nêu trên, dẫn chúng tôi vào nghiên cứu bài toán biên đối với một số lớp phương trình truyền sóng trong miền không trơn. Trong đó chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu toàn cục, nghiệm yếu địa phương của bài toán giá trị biên ban đầu đối với phương trình hyperbolic nửa tuyến tính trong các trụ không trơn, trong các miền có cạnh. Hơn nữa, chúng tôi nghiên cứu nghiệm mềm phân rã theo tốc độ mũ của bài toán giá trị ban đầu không địa phương đối với phương trình vi phân cấp hai phi tuyến trong không gian Banach với cấu trúc tắt dần trên miền trơn và không trơn.

2. Tổng quan nghiên cứu

Như đã đề cập trong mục Lí do chọn đề tài, việc nghiên cứu tính đặt đúng, tính trơn của nghiệm theo cả biến thời gian, biến không gian, biểu diễn tiệm cận của nghiệm của bài toán biên ban đầu đối với phương trình hyperbolic phi tuyến trong các miền không trơn nói chung, trong hình trụ không trơn vô hạn, miền có cạnh nói riêng là một vấn đề rất khó và hiện nay rất được quan tâm. Song song cùng vấn đề này, việc nghiên cứu sự tồn tại nghiệm mềm, các tính chất của nghiệm mềm của phương trình vi tích phân với cấu trúc tắt dần, bậc phân số... bởi việc ứng dụng các công cụ của giải tích cũng rất được quan tâm. Chúng tôi điểm qua một số kết quả tiêu biểu theo hướng nghiên cứu này. Một trong những kết quả đáng được chú ý đó là sự tồn tại nghiệm hay không tồn tại nghiệm toàn cục đã được khảo sát bởi J. L. Lions (1969), D. H. Sattinger (1968, 1975), H. A. Levine (1974), M. Can (1997), B. Zheng (2004). Trong công trình của mình, J. L. Lions đã đưa ra sự tồn tại nghiệm trong hình trụ hữu hạn với đáy bất kỳ bởi phương pháp compact và kỹ thuật Faedo-Galerkin. Trong phương trình của bài toán, ông đã xét toán tử $L = \Delta$ và hạng tử phi tuyến $f(x, t, u) = |u|^p u$.

Trước những kết quả đạt được của V. A. Kondrat'ev, V. A. Konzlov, V. Maz'ya, J. Rossmann đối với phương trình elliptic trong các miền không trơn: như miền nón, miền trơn từng mảnh, miền lùi, miền nhị diện, miền nón có cạnh, miền đa diện. Sử dụng kết quả của bài toán phổ liên kết với phương trình elliptic tổng quát trong các miền có cạnh, sự tồn tại duy nhất nghiệm, tính trơn của nghiệm đã được khẳng định trong không gian L_2 Sobolev có trọng, không gian Hölder có trọng đã được khảo sát. Nguyễn Mạnh Hùng cùng các đồng sự đã đạt được một số kết quả đáng kể về tính trơn của nghiệm theo biến thời gian của phương trình hyperbolic cấp hai

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + a(x,t) - u_{tt}(t) = f(x,t),\ (x,t) \in \Omega \times (0,\infty),\\
&u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, && x \in \Omega\\
&u(x,t) = 0, && (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty)
\end{aligned}$$

trong trụ vô hạn với đáy không trơn (2007); Đối với bài toán hỗn hợp xét với hệ phương trình hyperbolic mạnh cấp cao trong trụ không trơn vô hạn nhờ phương pháp xấp xỉ Galerkin, thành phần ở vế phải là $f(x,t)$, kết quả đạt được là sự tồn tại duy nhất nghiệm suy rộng; bằng phương pháp xấp xỉ biên, sự tồn tại duy nhất và tính trơn của nghiệm theo biến thời gian của bài toán giá trị biên đối với hệ phương trình hyperbolic trong trụ không trơn với đáy là miền lùi (2006, 2008); Bởi việc áp dụng phương pháp xấp xỉ Galerkin, chuyển qua bài toán elliptic trên miền chứa điểm nón, tính giải được duy nhất, tính chính quy, biểu diễn tiệm cận của nghiệm gần điểm nón đã đạt được đối với bài toán giá trị biên ban đầu đối với phương trình hyperbolic cấp cao (2013)

$$\begin{aligned}
&u_{tt}(t) + \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} (-1)^{\alpha}\partial^{\alpha}\big(a_{\alpha\beta}(x,t)\partial^{\beta}u(t)\big) = f(x,t), && (x,t) \in Q,\\
&B_j u = 0, && \text{trên } S, j = 1,\cdots,m,\\
&u(x,0) = u_t(x,0) = 0, && x \in G.
\end{aligned}$$

Khi nghiên cứu bài toán giá trị biên ban đầu đối với phương vi phân cấp hai trong không gian Banach với cấu trúc tắt dần, các kết quả đạt được đối với toán tử đàn hồi, toán tử tắt dần, tính chất của nửa nhóm sinh bởi hệ đàn hồi cùng cấu trúc tắt dần, sự tồn tại nghiệm, biểu diễn tiệm cận của nghiệm cũng đã được khẳng định. G. Chen và D. L. Russell (1982) đã đạt được một

số kết quả về hệ thức liên hệ giữa các toán tử đàn hồi $\mathcal{A}$ và tắt dần $\mathcal{B}$. của hệ

$$\begin{aligned} &u_{tt}(t) + \mathcal{B}u_t(t) + \mathcal{A}u(t) = 0, \quad t > 0 \\ &u(0) = x_0, \quad u_t(0) = y_0. \end{aligned}$$

Các kết quả tiếp theo mà trong đó đáng quan tâm là công trình của H. Fan, Y. Li và P. chen (2013). Áp dụng lý thuyết nửa nhóm các toán tử và định lý điểm bất động, hai nhà khoa học Fan và Li đã thu được sự tồn tại của nghiệm mềm trong các không gian Banach của hệ đàn hồi với cấu trúc tắt dần với hàm phi tuyến $f(t,p)$ là hàm Lipschitz theo biến thứ hai

$$(ESSD) \quad \begin{cases} u_{tt}(t) + \rho\mathcal{A}u_t(t) + \mathcal{A}^2u(t) = f(t,u(t)), \quad 0 < t < T, \\ u(0) = x_0, \quad u_t(0) = y_0. \end{cases}$$

Dựa trên kết quả của lý thuyết nửa nhóm ổn định mũ, H. Fan và F. Gao đã thu được biểu diễn tiệm cận của nghiệm mềm của hệ đàn hồi tuyến tính với cấu trúc tắt dần và hệ $(ESSD)$.

Qua việc tiếp nhận về những kết quả đã nêu trên, cho chúng tôi thấy rằng còn nhiều vấn đề cần nghiên cứu đối với các bài toán giá trị biên ban đầu đối với phương trình hyperbolic phi tuyến trong các trụ không trơn vô hạn, trong các miền có cạnh và bài toán giá trị ban đầu đối với phương trình vi phân cấp hai trong không gian Banach với cấu trúc tắt dần, một dạng trừu tượng của phương trình truyền sóng với cấu trúc tắt dần. Chính bởi cách nhìn nhận này, chúng tôi quan tâm nghiên cứu tới những vấn đề:

- Sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu trên $[0,+\infty)$ của bài toán giá trị biên ban đầu thứ nhất đối với phương trình hyperbolic phi tuyến bậc cao trong trụ không trơn vô hạn với thành phần nhiễu phi tuyến.
- Sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu trên $[0,T]$ $(0 < T < +\infty)$ của bài toán giá trị biên ban đầu đối với phương trình hyperbolic cấp hai phi tuyến trong một số miền có cạnh.
- Sự tồn tại nghiệm mềm phân rã theo tốc độ mũ của bài toán giá trị biên ban đầu không địa phương đối với phương trình vi phân cấp hai phi tuyến với cấu trúc tắt dần trên miền trơn và không trơn.

3. Mục đích, đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại, tính duy nhất, nghiệm yếu trên $[0, +\infty)$ trong các không gian Sobolev có trọng của bài toán biên ban đầu đối với các phương trình hyperbolic nửa tuyến tính cấp cao trong các miền trụ không trơn; nghiên cứu sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu, tính chính quy theo biến thời gian của nghiệm yếu trên $[0, T]$ $(0 < T < +\infty)$ của bài toán biên ban đầu đối với phương trình hyperbolic cấp hai nửa tuyến tính trong miền có cạnh, miền nón có cạnh. Thêm nữa, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm mềm phân rã theo tốc độ mũ của bài toán giá trị biên ban đầu không địa phương đối với phương trình vi phân cấp hai nửa tuyến tính với cấu trúc tắt dần trên miền trơn và không trơn có điểm nón trên biên.

4. Phương pháp nghiên cứu

- Trong luận án, chúng tôi sử dụng phương pháp Galerkin, các định lý nhúng, áp dụng phương pháp điểm bất động, chuyển qua bài toán tuyến tính và áp dụng một số kết quả về toán tử sinh ra từ bài toán elliptic trong miền kì dị.
- Áp dụng độ đo không compact, phương pháp điểm bất động đối với ánh xạ nén.

5. Kết quả của luận án

- Sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu trên $[0, \infty)$ của bài toán biên ban đầu đối với phương trình hyperbolic nửa tuyến tính cấp cao trong trụ không trơn.
- Sự tồn tại duy nhất và tính chính quy của nghiệm yếu trên đoạn $[0, T]$ trong không gian Sobolev có trọng của bài toán biên ban đầu đối với phương trình hyperbolic nửa tuyến tính cấp hai trong miền có cạnh và nón có cạnh.
- Sự tồn tại và tính phân rã theo tốc độ mũ của nghiệm mềm của bài toán giá trị ban đầu không địa phương đối với phương trình vi phân cấp hai nửa tuyến tính trong không gian Banach với cấu trúc tắt dần trên miền trơn và không trơn, thành phần phi tuyến trong phương trình được xét đến thuộc lớp hàm có giá trị trong không gian Banach liên tục bị chặn.

Các kết quả của luận án là mới, có ý nghĩa khoa học, và góp phần vào việc hoàn thiện các kết quả thu được trước đó của bài toán biên đối với phương trình truyền sóng trên một số miền không trơn.

6. Cấu trúc của luận án

Luận án gồm 4 chương:

Chương 1: Một số kiến thức chuẩn bị

Chương 2: Bài toán biên ban đầu đối với phương trình hyperbolic nửa tuyến tính trong trụ không trơn

Chương 3: Bài toán Dirichlet-Cauchy đối với phương trình hyperbolic nửa tuyến tính trong các miền đa diện

Chương 4: Phương trình truyền sóng nửa tuyến tính với cấu trúc tắt dần.

Chương 1
MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Không gian các hàm, hội tụ yếu, định lý nhúng

Trong mục này, chúng tôi giới thiệu một số không gian hàm; hội tụ yếu và các định lý nhúng áp dụng trong các không gian Sobolev.

1.2. Một số bất đẳng thức

Gagliardo-Nirenberg, Cauchy, Young, Hölder, Gronwall.

1.3. Một số kiến thức căn bản về lí thuyết toán tử

Các kiến thức căn bản về lí thuyết toán tử bị chặn được chúng tôi nhắc lại trong mục này.

1.4. Một số bổ đề nhúng trong miền có cạnh, bài toán Dirichlet đối với phương trình elliptic cấp hai trong miền đa diện

Miền có cạnh và một số bổ đề nhúng. Thêm nữa, xét bài toán Dirichlet đối với phương trình elliptic cấp hai.

1.5. Một số bổ đề nhúng và bài toán Dirichlet đối với hệ elliptic mạnh trong miền nón có cạnh

Miền nón có cạnh và một số bổ đề nhúng. Bổ đề nhúng ứng với bài toán Dirichlet.

1.6. Một số kiến thức căn bản về lí thuyết nửa nhóm các toán tử tuyến tính bị chặn

Trong mục này, chúng tôi nhắc lại một số định nghĩa, tính chất của nửa nhóm toán tử tuyến tính bị chặn và một số nửa nhóm quan trọng.

1.7. Một số kiến thức căn bản về độ đo không compact và ánh xạ nén

Các khái niệm và tính chất của độ đo không compact được chúng tôi nhắc lại, trong đó độ đo không compact Hausdorff và định lý về điểm bất động của ánh xạ nén ứng với độ đo không compact được đề cập.

Chương 2

BÀI TOÁN BIÊN BAN ĐẦU ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH HYPERBOLIC NỬA TUYẾN TÍNH TRONG TRỤ KHÔNG TRƠN

2.1. Thiết lập bài toán

Giả sử $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ là miền bị chặn có biên $\partial\Omega$ không trơn, $Q = \Omega \times (0, \infty), S = \partial\Omega \times (0, \infty)$. Ta xét bài toán:

$$u_{tt} + (-1)^m Lu + F(x, t, u, Du, \cdots, D^{2m-2}u) = h, \qquad (x, t) \in Q, \tag{2.3}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\Big|_S = 0, \qquad j = 0, 1, \cdots, m-1, \tag{2.5}$$

ở đó hàm $h: Q \to \mathbb{R}$ là hàm đã cho, hàm phi tuyến tổng quát F có dạng $F = \sum\limits_{0 \leq |\alpha| \leq m-1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha F_\alpha(x, t, u, Du, \cdots, D^{m-1}u)$, $(x, t) \in Q$, trong đó tồn tại hàm $A = A(x, t, v_\alpha, |\alpha| \leq m-1)$ sao cho $F_\alpha = \dfrac{\partial A}{\partial v_\alpha}$ liên tục trên Q và với tất cả $t \in [0, +\infty)$, $x \in \Omega$ các điều kiện sau thỏa mãn

$$|F_\alpha(x, t, v_0, v_1, \cdots, v_{m-1})| \leq C\Big(1 + \sum_{|\alpha| \leq m-1} |v_\alpha|^{p+1}\Big), \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} &|F_\alpha(x, t, v_0, v_1, \cdots, v_{m-1}) - F_\alpha(x, t, w_0, w_1, \cdots, w_{m-1})| \\ &\qquad \leq C \sum_{|\alpha| \leq m-1} \big(1 + |v_\alpha|^p + |w_\alpha|^p\big)|v_\alpha - w_\alpha|; \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\Big|\frac{\partial A}{\partial t}\Big| \leq C\Big(1 + \sum_{|\alpha| \leq m-1} |v_\alpha|^p\Big); \tag{2.8}$$

$$A(x, 0, 0, \cdots, 0) = 0, \quad \int_\Omega A(x, t, u, Du, \cdots, D^{m-1}u)dx \geq 0, \tag{2.9}$$

với hầu khắp $t \in [0, +\infty)$. Ở đây $\frac{2}{n} \leq p \leq \frac{2}{n-2}$ khi $n > 2$ và $1 \leq p < +\infty$ khi $n = 2$. Toán tử vi phân L trên Q có cấp $2m$ với hệ số hàm $a_{\alpha\beta} \in C^1(\overline{Q})$, $a_{\alpha\beta}(x, t) = (-1)^{|\alpha|+|\beta|} a_{\beta\alpha}(x, t)$, $|\alpha|, |\beta| = 0, 1, \cdots, m$, $(x, t) \in \overline{Q}$. Ta giả thiết rằng tồn tại hằng số dương θ sao cho

$$B[u, u; t] = (-1)^m \int_\Omega \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_{\alpha\beta}(x, t) D^\alpha u D^\beta u \geq \theta \|u\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)}$$

thỏa mãn với mọi $u \in \mathring{H}^m(\Omega)$, với mọi $t \geq 0$. Không gian Sobolev $H_*^{m,1}(Q)$ gồm tất cả các hàm u thỏa mãn $u \in L_\infty\big(0,\infty;\mathring{H}^m(\Omega)\big)$, $u_t \in L_\infty\big(0,\infty;L_2(\Omega)\big)$, $u_{tt} \in L_\infty\big(0,\infty;H^{-m}(\Omega)\big)$ với chuẩn

$$\|u\|_{H_*^{m,1}(Q)} = \|u\|_{L_\infty\left(0,\infty;\mathring{H}^m(\Omega)\right)} + \|u_t\|_{L_\infty\left(0,\infty;L_2(\Omega)\right)} + \|u_{tt}\|_{L_\infty\left(0,\infty;H^{-m}(\Omega)\right)}.$$

Tương tự, thay vì xét $t \in [0,\infty)$ ta xét $t \in [0,T]$ $(0 < T < \infty)$, ta có không gian Sobolev $H_*^{m,1}(Q_T)$ với chuẩn $\|u\|_{H_*^{m,1}(Q_T)}$.

Định nghĩa 2.1. Với mỗi $h \in L_2\big(0,\infty;L_2(\Omega)\big)$, hàm $u \in H_*^{m,1}(Q)$ được gọi là nghiệm yếu toàn cục của bài toán (2.3)-(2.5) nếu $u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0,\ x \in \Omega$ và đẳng thức

$$\langle u_{tt}(t), v\rangle + B[u(t), v; t] + \sum_{0\leq|\alpha|\leq m-1} \big(F(\cdot,t,u,Du,\cdots,D^{m-1}u), D^\alpha v\big) = \big(h(\cdot,t), v\big) \quad (2.10)$$

thỏa mãn với tất cả $v \in \mathring{H}^m(\Omega)$ và hầu khắp $t \in [0,+\infty)$. Thay vì $t \in [0,\infty)$ ta xét $t \in [0,T]$ $(0 < T < \infty)$, ta nói $u \in H_*^{m,1}(Q_T)$ là nghiệm yếu địa phương của bài toán (2.3)-(2.5).

2.2. Sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm yếu địa phương

Định lý 2.2. *Với mỗi $h \in L_2\big(0,T;L_2(\Omega)\big)$, bài toán (2.3)−(2.5) có nghiệm yếu địa phương $u \in H_*^{m,1}(Q_T)$ và tồn tại hằng số $C > 0$ độc lập với u, h sao cho*

$$\|u\|^2_{H_*^{m,1}(Q_T)} \leq C\big(1 + \|h\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}\big) \quad (2.32)$$

Định lý 2.3. *Với mỗi $h \in L_2\big(0,T;L_2(\Omega)\big)$, bài toán (2.3)−(2.5) có duy nhất nghiệm yếu địa phương $u \in H_*^{m,1}(Q_T)$.*

2.3. Sự tồn và tính duy nhất của nghiệm yếu toàn cục

Định lý 2.4. *Với mỗi $h \in L_2\big(0,\infty;L_2(\Omega)\big)$, bài toán (2.3)−(2.5) có duy nhất nghiệm yếu toàn cục $u \in H_*^{m,1}(Q)$.*

Chương 3

BÀI TOÁN DIRICHLET-CAUCHY ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH HYPERBOLIC NỬA TUYẾN TÍNH TRONG CÁC MIỀN ĐA DIỆN

3.1. Bài toán Dirichlet-Cauchy đối với phương trình hyperbolic nửa tuyến tính trong miền có cạnh

3.1.1. Mở đầu

Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ $(n > 2)$ với biên $\partial\Omega$ bao gồm hai $(n-1)-$phẳng Γ_1, Γ_2 giao nhau theo $(n-2)-$phẳng l_0 là đa tạp. Ta xét bài toán sau:

$$u_{tt} + L(x,t,\partial)u = f(x,t,u,Du) + h(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{3.4}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad x \in \Omega \tag{3.5}$$

$$u|_{S_T} = 0, \tag{3.6}$$

ở đây L là toán tử đạo hàm riêng cấp hai phân kỳ; f, h là các hàm đã cho.

Định nghĩa 3.1. Hàm $u(x,t)$ gọi là nghiệm yếu của bài toán (3.4)$-$(3.6) trên $[0,T]$ nếu $u \in L_2\big(0,T;\mathring{H}^1(\Omega)\big), u_t \in L_2\big(0,T;L_2(\Omega)\big), u_{tt} \in L_2\big(0,T;H^{-1}(\Omega)\big)$ đồng thời $u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0,\ x \in \Omega$ và đẳng thức

$$\langle u_{tt}(t), v\rangle + B[u(t), v; t] = \big(f(\cdot,t,u,Du), v\big) + \big(h(\cdot,t), v\big)$$

đúng với tất cả $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$ và hầu khắp $t \in [0,T]$. Ở đây B là dạng song tuyến tính ứng với L.

3.1.2. Bài toán tuyến tính

a. Sự tồn tại nghiệm của bài toán tuyến tính

Khi $f(x,t,u,Du) \equiv 0$ trên Q_T, ta có bài toán sau:

$$u_{tt} + L(x,t,\partial)u = h(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{3.7}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad x \in \Omega \tag{3.8}$$

$$u|_{S_T} = 0. \tag{3.9}$$

Hàm $u(x,t)$ được gọi là nghiệm yếu của bài toán (3.7)$-$(3.9) trên $[0,T]$ nếu $u \in L_2\big(0,T;\mathring{H}^1(\Omega)\big), u_t \in L_2\big(0,T;L_2(\Omega)\big),\ u_{tt} \in L_2\big(0,T;H^{-1}(\Omega)\big)$ đồng

thời $u(x,0)=0, u_t(x,0)=0, x\in\Omega$ và

$$\langle u_{tt}(t),v\rangle + B[u(t),v;t] = \big(h(\cdot,t),v\big) \tag{3.10}$$

thỏa mãn với tất cả $v\in \mathring{H}^1(\Omega)$ và với hầu khắp $t\in[0,T]$.

Định lý 3.1. *Nếu $h\in C\big(0,T;L_2(\Omega)\big)$ thì bài toán (3.7)–(3.9) có duy nhất nghiệm yếu $u(t)\in \mathring{H}^1(\Omega), t\in[0,T]$ thỏa mãn*

$$\|u(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)} + \|u_t(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \le C\int\limits_0^t \|h(s)\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad \forall t\in(0,T], \tag{3.11}$$

với C là hằng số dương phụ thuộc vào Ω, T và các hệ số của toán tử L.

b. Tính trơn của nghiệm yếu theo biến thời gian của bài toán tuyến tính

Định lý 3.2. *Cho $k\in\mathbb{N}, h_{t^j}\in C\big([0,T];L_2(\Omega)\big),\ j=0,1,\cdots,k$. Khi đó bài toán (3.7)–(3.9) có nghiệm yếu u thỏa mãn*

$$u_{t^j}\in C\big(0,T;\mathring{H}^1(\Omega)\big),\ j=0,1,\cdots,k, \tag{3.39}$$

$$\sum_{j=0}^k \|u_{t^j}(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)} + \|u_{t^{k+1}}\|^2_{L_2(\Omega)} \le C\sum_{j=0}^k\int\limits_0^t \|h_{t^j}(s)\|^2_{L_2(\Omega)}ds \tag{3.40}$$

với $\forall t\in[0,T]$.

Ta nói rằng hàm u thuộc $\mathscr{H}_a^k$, nếu $u\in\bigcap\limits_{j=0}^k C^{(j)}\big(0,T;H_a^{k-j}(\Omega)\big)$. Với mỗi $u\in\mathscr{H}_a^k$ và với mỗi $t\in[0,T]$, ta định nghĩa các chuẩn sau

$$\|u(t)\|^2_{\mathscr{H}_a^k(\Omega)} = \sum_{j=0}^k \|u_{t^j}(t)\|^2_{H_a^{k-j}(\Omega)} \text{ và } \|u\|_{\mathscr{H}_a^k} = \sum_{j=0}^k \|u_{t^j}\|_{C\left([0,T];H_a^{k-j}(\Omega)\right)}.$$

Định lý 3.3. *Cho $k\in\mathbb{N}, k\ge 2$ và giả thiết rằng $h_{t^j}\in C\big(0,T;H_a^{k-j}(\Omega)\big)$, $0\le j\le k-1$, $h_{t^j}(x,0)=0, 0\le j\le k-2$ và $k+1-a<\dfrac{\pi}{\omega},\ a\in[0,1]$. Khi đó nghiệm yếu u của bài toán (3.7)–(3.9) thuộc $\mathscr{H}_a^k$ và*

$$\|u(t)\|^2_{\mathscr{H}_a^k(\Omega)} \le C\int\limits_0^t \|h(s)\|^2_{\mathscr{H}_a^{k-1}(\Omega)}ds,\ t\in(0,T]. \tag{3.56}$$

3.1.3. Bài toán nửa tuyến tính

Bổ đề 3.1. *Cho* $v_i \in C^{(k_i)}\big(0,T;H_a^{l-k_i}(\Omega)\big)$, $i = 1,\cdots,m$, *ở đây* l, k_i *là* $m+1$ *số nguyên dương thỏa mãn* $l \geq \dfrac{n}{2} + a + 1$, $0 \leq k_1 \leq l-1$, $k_i \leq l - 1 - \left[\dfrac{n}{2}\right]$, $i = 2,\cdots,m$. *Giả thiết rằng các đa chỉ số* α_i $(i = 1,\cdots,m)$ *thỏa mãn* $|\alpha_1| \leq l - k_1 - 1, |\alpha_i| \leq l - k_i - 1 - \left[\frac{n}{2}\right]$, *và* $\sum\limits_{i=1}^{m} |\alpha_i| \leq l - \sum\limits_{i=1}^{m} k_i$. *Khi đó*

$$\|r^a D^{\nu_1} v_1 \cdots D^{\nu_m} v_m\|_{L_2(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^{m} \|v_i\|_{H_a^{l-k_i}(\Omega)}. \tag{3.67}$$

Hàm $f(x,t,v_1,\cdots,v_{n+1})$ thuộc lớp $C^{(k),1}(\overline{Q}_T \times \mathbb{R}^{n+1})$ nếu $f \in C^{(k)}(\overline{Q}_T \times \mathbb{R}^{n+1})$ và $D^\alpha f(x,t,\cdot)$ là hàm liên tục Lipschitz địa phương theo $n+1$ biến $v_1,\cdots,v_{n+1}$, với mỗi $(x,t) \in \overline{Q}_T$, $|\alpha| \leq k$. Cho $f \in C^{(k),1}(\overline{Q}_T \times \mathbb{R}^{n+1})$ và với mỗi hằng số $b \geq 0$, ta kí hiệu

$$M(b) = \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{(x,t) \in Q_T} \sup_{|v_i| \leq Cb} |D^\alpha f(x,t,v_1,\cdots,v_{n+1})|,$$

ở đây C là hằng số dương đã cho.

Bổ đề 3.2. *Cho* $k \geq a + \dfrac{n}{2}$, $f \in C^{(k),1}(\overline{Q}_T \times \mathbb{R}^{n+1})$ *và cho các hàm* $u_1, u_2 \in \mathscr{H}_a^{k+1}$ *thỏa mãn bất đẳng thức*

$$\max_{t \in [0,T], i \in \{1,2\}} \|u_i(t)\|_{\mathscr{H}_a^{k+1}} \leq b, \tag{3.69}$$

với b *là hằng số không âm. Đặt* $F_i(x,t) = f(x,t,u_i,Du_i)$, $i = 1,2$. *Khi đó*

(i) $F_i \in \mathscr{H}_a^k$, $i = 1,2$ *và tồn tại hằng số dương* C *sao cho với mỗi* $t \in (0,T)$, *bất đẳng thức sau thỏa mãn*

$$\|F_i(t)\|_{\mathscr{H}_a^k} \leq CM(b)\left(1 + \|u_i(t)\|^k_{\mathscr{H}_a^{k+1}}\right), \ i = 1,2; \tag{3.70}$$

(ii) Tồn tại hằng số $K(b) > 0$ *sao cho với mỗi* $t \in (0,T)$, *ta có*

$$\|F_1(t) - F_2(t)\|_{\mathscr{H}_a^k} \leq K(b)\,\|u_1(t) - u_2(t)\|_{\mathscr{H}_a^{k+1}} \tag{3.71}$$

Định lý 3.4. *Cho* $k \geq a + \dfrac{n}{2}, k+1-a < \dfrac{\pi}{\omega}$, $a \in [0,1]$ *và cho* $h \in \mathscr{H}_a^{k-1}$, $f \in C^{(k-1),1}(\overline{Q}_\tau \times \mathbb{R}^{n+1})$ *thỏa mãn* $h_{t^j}(x,0) = 0, f_{t^j}(x,0,v,v_1) = 0$, $0 \leq j \leq k-2$. *Khi đó bài toán (3.4)–(3.6) có duy nhất nghiệm* $u \in \mathscr{H}_a^k$ *và*

$$\|u\|_{\mathscr{H}_a^k} \leq C(1 + \|h\|_{\mathscr{H}_a^{k-1}}), \tag{3.72}$$

ở đây C *là hằng số độc lập với* u.

3.2. Bài toán Dirichlet-Cauchy đối với phương trình hyperbolic nửa tuyến tính trong miền nón có cạnh

3.2.1. Mở đầu

Cho

$$\mathcal{K} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \ \frac{x}{|x|} \in \Omega \right\}$$

là một nón bị chặn có đỉnh tại gốc tọa độ. Giả thiết rằng biên $\partial\mathcal{K}$ bao gồm đỉnh $x = 0$, các cạnh (các nửa đường thẳng) $M_1, \cdots, M_d$ xuất phát từ đỉnh, các mặt nhẵn (lớp C^∞) $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_d$ và Ω là một miền kiểu đa giác nằm trên mặt cầu đơn vị S^2 tâm tại gốc, có các đỉnh là giao điểm của $M_k, k = 1, \cdots, d$ với S^2 và các cạnh là $\gamma_k = \Gamma_k \cap S^2, k = 1, \cdots, d$. Cho $0 < T < \infty$, đặt $\mathcal{K}_T = \mathcal{K} \times (0, T), \partial\mathcal{K}_T = \bigcup\limits_{i=1}^{d} \Gamma_i \times (0, T)$. Ta xét bài toán:

$$u_{tt}(x,t) + L(x,t,\partial)u = f(x,t,u) + h(x,t), \quad (x,t) \in \mathcal{K}_T, \tag{3.79}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \qquad x \in \mathcal{K} \tag{3.80}$$

$$u|_{\partial\mathcal{K}_T} = 0, \tag{3.81}$$

trong đó f và h là các hàm đã cho.

Định nghĩa 3.2. Hàm $u(x,t)$ gọi là nghiệm yếu của (3.79)−(3.81) trên $[0,T]$ nếu $u \in L_2\big(0,T; \mathring{H}^1(\mathcal{K})\big), u_t \in L_2\big(0,T; L_2(\mathcal{K})\big)$, $u_{tt} \in L_2\big(0,T; H^{-1}(\mathcal{K})\big)$ sao cho $u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \ \forall x \in \mathcal{K}$ và đẳng thức

$$\big(u_{tt}(t), v\big) + B\big[u, v; t\big] = \big(f(t, u(t)), v\big) + \big(h(t), v\big), \tag{3.82}$$

thỏa mãn với mọi $v \in \mathring{H}^1(\mathcal{K})$ và hầu khắp $t \in [0,T]$.

3.2.2. Bài toán tuyến tính

a. Sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu của bài toán tuyến tính

Khi $f(x,t,u) \equiv 0$ trên $\mathcal{K}_T$, ta có bài toán:

$$u_{tt}(x,t) + L(x,t,\partial)u = h(x,t), \qquad (x,t) \in \mathcal{K}_T, \tag{3.83}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \qquad x \in \mathcal{K} \tag{3.84}$$

$$u|_{\mathcal{K}_T} = 0. \tag{3.85}$$

Hàm $u(x,t)$ được gọi là nghiệm yếu của bài toán (3.83)−(3.85) trên $[0,T]$ nếu $u \in L_2\big(0,T; H^1(\mathcal{K})\big), u_t \in L_2\big(0,T; L_2(\mathcal{K})\big)$, $u_{tt} \in L_2\big(0,T; H^{-1}(\mathcal{K})\big)$ sao

cho $u(x,0)=0, u_t(x,0)=0$ và đẳng thức

$$\langle u_{tt}(t), v\rangle + B[u(t), v; t] = \big(h(t), v\big) \tag{3.86}$$

thỏa mãn với tất cả $v \in \mathring{H}^1(\mathcal{K})$ và hầu khắp $t \in [0,T]$.

Định lý 3.5. *Với mỗi $h \in C\big(0,T; L_2(\mathcal{K})\big)$ và giả thiết rằng các hệ số của toán tử L thỏa mãn*

$$\sup_{1\le i,j\le n} \{|a_{ij}(x,t)|, |b_i(x,t)|, |c(x,t)| : \ (x,t) \in \mathcal{K}_T\} \le \mu, \ \mu = const.$$

Khi đó bài toán (3.83)–(3.85) có duy nhất nghiệm yếu $u(t), t \in [0,T]$ thỏa mãn

$$\|u(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\mathcal{K})} + \|u_t(t)\|^2_{L_2(\mathcal{K})} \le C \int\limits_0^t \|h(s)\|^2_{L_2(\mathcal{K})} ds, \tag{3.87}$$

với $\forall t \in (0,T]$. Ở đây C là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào $\mathcal{K}, T$ và các hệ số hàm của toán tử L.

b. Tính trơn của nghiệm yếu theo biến thời gian của bài toán tuyến tính

Sau đây ta sử dụng các giả thiết:

($\mathbf{T}_1$) Giả sử tồn tại hằng số $\mu > 0$ sao cho

$$\sup_{1\le i,j\le n} \{|a_{ijt^s}(x,t)|, |b_{it^s}(x,t)|, |c_{t^s}(x,t)| : \ (x,t) \in \mathcal{K}_T, s = 0,1,2\} \le \mu.$$

($\mathbf{T_2}$) Giả sử $\beta \in \mathbb{R}, \delta = (\delta_1, \cdots, \delta_d) \in \mathbb{R}^d$ sao cho $\beta, \delta_k \in [0,1], \ k = 1, \cdots, d$.

($\mathbf{T_3}$) Giả sử rằng dải đóng các số thực nằm giữa hai đường thẳng $\lambda = -\frac{1}{2}$ và $\lambda = \frac{1}{2} - \beta$ không chứa các giá trị riêng của toán tử pencil $\mathfrak{U}(\lambda, t), \ t \in [0,T]$ và $-\delta_+^{(k)} < \delta_k - 1 < \delta_-^{(k)}, \ k = 1, \cdots, d$.

Định lý 3.6. *Cho $m \in \mathbb{N}, h_{t^k} \in C\big([0,T]; L_2(\mathcal{K})\big), \ k = 0,1,\cdots,m$ và giả sử ($\mathbf{T_1}$) thỏa mãn. Khi đó bài toán (3.83)–(3.85) có nghiệm yếu $u(t), t \in [0,T]$ thỏa mãn*

$$u_{t^k} \in C\big(0,T; \mathring{H}^1(\mathcal{K})\big), \ k = 0,1,\cdot,m, \ \forall t \in [0,T], \tag{3.88}$$

$$\sum_{k=0}^m \|u_{t^k}(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\mathcal{K})} + \|u_{t^{m+1}}\|^2_{L_2(\mathcal{K})} \le C \sum_{k=0}^m \int\limits_0^t \|h_{t^k}(s)\|^2_{L_2(\mathcal{K})} ds. \tag{3.89}$$

Một hàm u thuộc không gian $\mathscr{H}^l_{\beta,\delta}$ nếu $u \in \bigcap_{j=0}^{l} C^{(j)}\big(0,T;V^{l-j}_{\beta,\delta}(\mathcal{K})$. Với mỗi $u \in \mathscr{H}^l_{\beta,\delta}$ và với mỗi $t \in [0,T]$, ta định nghĩa các chuẩn sau

$$\|u(t)\|^2_{l,\beta,\delta} = \sum_{j=0}^{l} \|u_{t^j}(t)\|^2_{V^{l-j}_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} \text{ và } \|u\|_{\mathscr{H}^l_{\beta,\delta}} = \sum_{j=0}^{k} \|u_{t^j}\|_{C(0,T;V^{l-j}_{\beta,\delta}(\mathcal{K}))}.$$

Định lý 3.7. *Giả sử* $(\mathbf{T_1}), (\mathbf{T_2}), (\mathbf{T_3})$ *cùng các điều kiện sau thỏa mãn*

(i) $h_{t^k} \in V^0_{\beta,\delta}(\mathcal{K}_T),\ k = 0,1,2.$

(ii) $h(x,0) = 0.$

Nếu $u(t) \in \mathring{H}^1(\mathcal{K})$ *là nghiệm yếu trên* $[0,T]$ *của (3.83)−(3.85) thì* $u \in \mathscr{H}^2_{\beta,\delta}$ *và*

$$\|u(t)\|^2_{2,\beta,\delta} \le C \int_0^t \|h(s)\|^2_{1,\beta,\delta} ds,\ t \in [0,T]. \tag{3.90}$$

3.2.3. Bài toán nửa tuyến tính

Đối với hàm $f:\ \mathbb{R}^3 \times [0,+\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x,t,p) \mapsto f(x,t,p)$, ta ký hiệu $f_t(x,t,p) = \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t,p); f_x(x,t,p) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t,p); f_p(x,t,p) = \dfrac{\partial f}{\partial p}(x,t,p)$. Với hằng số $\alpha \in [0,2]$, ta nói rằng hàm $f(x,t,u)$ thỏa mãn điều kiện $(\mathbf{F})$ nếu các điều kiện sau đồng thời xảy ra

$$|f_x(x,t,p)| \le C|p|^{\alpha+1}; \tag{3.100}$$

$$|f_t(x,t,p)| \le C|p|^{\alpha+1}; \tag{3.101}$$

$$|f_p(x,t,p)| \le C(1+|p|^{\alpha}); \tag{3.102}$$

$$|f(x,t,p) - f(x,t,q)| \le C(|p|^{\alpha} + |q|^{\alpha})|p-q|; \tag{3.103}$$

$$|f_x(x,t,p) - f_x(x,t,q)| \le C(|p|^{\alpha} + |q|^{\alpha})|p-q|; \tag{3.104}$$

$$|f_t(x,t,p) - f_t(x,t,q)| \le C(|p|^{\alpha} + |q|^{\alpha})|p-q|; \tag{3.105}$$

$$|f_p(x,t,p) - f_p(x,t,q)| \le C(|p|^{\alpha-1} + |q|^{\alpha-1})|p-q|. \tag{3.106}$$

Bổ đề 3.3. *Cho* $\alpha \in [0,2]$, *giả thiết* $(\mathbf{T_2}), (\mathbf{F})$ *thỏa mãn và* $f(x,0,0) = 0$. *Khi đó với mọi* $u_1, u_2 \in \mathscr{H}^2_{\beta,\delta}$ *sao cho* $\max_{t\in[0,T], i\in\{1,2\}} \|u_i\|_{\mathscr{H}^2_{\beta,\delta}} \le R$, *đặt* $F_i(t) = f\big(x,t,u_i(t)\big),\ i = 1,2$ *thì*

(a) $F_i \in \mathscr{H}^1_{\beta,\delta}$, $i = 1, 2$ *và tồn tại hằng số* $C > 0$ *độc lập với* u_1, u_2 *sao cho với mỗi* $t \in [0, T], i = 1, 2$, *ta có*

$$\|F_i(t)\|^2_{1,\beta,\delta} \leq C\big(\|u_i(t)\|^2_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} + \|u_i(t)\|^{2(\alpha+1)}_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})}\big). \tag{3.108}$$

(b) Tồn tại hằng số $C_R > 0$ *phụ thuộc* R *sao cho với* $\forall t \in [0, T]$, *ta có*

$$\|F_1(t) - F_2(t)\|_{1,\beta,\delta} \leq C_R\|u_1(t) - u_2(t)\|_{2,\beta,\delta}. \tag{3.109}$$

Định lý 3.8. *Cho* $\alpha \in [0, 2]$, *giả sử* $(\mathbf{T_1}), (\mathbf{T_2}), (\mathbf{T_3}), (\mathbf{F})$ *thỏa mãn và* $h \in L_2\big(0, T; \mathscr{H}^1_{\beta,\delta}\big), h_{t^k} \in V^0_{\beta,\delta}(\mathcal{K}_T)$, $k = 0, 1, 2; f(x, 0, 0) = 0, h(x, 0) = 0$. *Khi đó bài toán (3.79)–(3.81) có duy nhất nghiệm yếu* $u \in \mathscr{H}^2_{\beta,\delta}$ *trên* $[0, \tau]$, $0 < \tau \leq T$ *và*

$$\|u\|^2_{\mathscr{H}^2_{\beta,\delta}} \leq C\big(1 + \|h\|^2_{L_2(0,T;\mathscr{H}^1_{\beta,\delta})}\big), \tag{3.127}$$

ở đây C *là hằng số dương không phụ thuộc* u.

Bổ đề 3.4. *Cho* $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *là hàm không giảm và tồn tại* $\varepsilon > 0$ *sao cho* $g|_{[0,\varepsilon]} \in C^1([0, \varepsilon]), g(0) = g'(0) = 0$. *Khi đó tồn tại* $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ *phụ thuộc số* $b > 0$ *nào đó và* ε_1 *là duy nhất thỏa mãn*

$$b + Mg(x) > x, \quad \text{với } 0 \leq x < \varepsilon_1, \tag{3.133}$$

$$b + Mg(x) < x, \quad \text{với } \varepsilon_1 < x < \varepsilon_2 \tag{3.134}$$

với b *đủ nhỏ.*

Định lý 3.9. *Giả sử các giả thiết trong Định lý 3.8 thỏa mãn. Khi đó bài toán (3.79)–(3.81) có duy nhất nghiệm yếu* $u \in \mathscr{H}^2_{\beta,\delta}$ *trên* $[0, T]$ *và*

$$\|u(t)\|^2_{2,\beta,\delta} \leq C\big(1 + \|h\|^2_{L_2(0,T;\mathscr{H}^1_{\beta,\delta})}\big), \ \forall\, t \in (0, T],$$

ở đây C *là hằng số độc lập với* u.

Chương 4

PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN SÓNG NỬA TUYẾN TÍNH VỚI CẤU TRÚC TẮT DẦN

4.1. Thiết lập bài toán

Cho $(X, \|\cdot\|)$ là không gian Banach, chúng ta xét phương trình truyền sóng nửa tuyến tính với cấu trúc tắt dần gồm các điều kiện ban đầu không địa phương có dạng sau

$$u_{tt}(t) + \rho\mathcal{A}u_t(t) + \mathcal{A}^2u(t) = f(t, u(t)), \quad t > 0 \tag{4.8}$$

$$u(0) + g(u) = x_0, \quad u_t(0) + h(u) = y_0, \tag{4.9}$$

ở đây $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset X \longrightarrow X$ là toán tử tuyến tính đóng, $\rho \geq 2$ là hằng số đã cho, $x_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), y_0 \in X$ và g, h, f là các hàm đã cho.

Định nghĩa 4.1. Một hàm $u \in C([0,T]; X)$ được gọi là nghiệm mềm của bài toán (4.8)−(4.9) trên $[0,T]$ nếu

$$u(t) = S_2(t)\big(x_0 - g(u)\big) + \int_0^t S_2(t-s)S_1(s)v_0 ds + \int_0^t \int_0^s S_2(t-s)S_1(s-\tau)f\big(\tau, u(\tau)\big)d\tau ds, \tag{4.16}$$

với bất kỳ $t \in [0,T]$, ở đây $v_0 = y_0 - h(u) + \sigma_2\mathcal{A}\big(x_0 - g(u)\big)$.

4.2. Sự tồn tại nghiệm mềm của bài toán

Giả thiết rằng

(A) Toán tử $-\mathcal{A}$ sinh ra C_0-nửa nhóm liên tục chuẩn $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ trên không gian Banach X.

(G) Hàm $g: \ C\big([0,T]; X\big) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$ được xác định bởi các điều kiện:

(i) g là hàm liên tục và tồn tại hàm $\theta_g: \ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ là hàm không giảm sao cho

$$\|g(u)\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} \leq \theta_g(\|u\|_C), \ \forall u \in C([0,T]; X). \tag{4.17}$$

(ii) Tồn tại các hằng số không âm η_g, ξ_g sao cho với mọi tập bị chặn $\Omega \subset C([0,T];X)$,

$$\chi(g(\Omega)) \leq \eta_g\, \chi_T(\Omega), \tag{4.18}$$

$$\chi(\mathcal{A}g(\Omega)) \leq \xi_g\, \chi_T(\Omega). \tag{4.19}$$

(H) Hàm $h:\ C([0,T];X) \longrightarrow X$ thỏa mãn các điều kiện sau

(i) Tồn tại $\theta_h:\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ là hàm liên tục, không giảm sao cho

$$\|h(u)\|_X \leq \theta_h(\|u\|_C),\ \forall u \in C([0,T];X), \tag{4.20}$$

(ii) Tồn tại hằng số dương η_h sao cho

$$\chi\big(h(\Omega)\big) \leq \eta_h\, \chi_T(\Omega), \tag{4.21}$$

với tất cả các tập bị chặn $\Omega \subset C([0,T];X)$.

(F) Hàm phi tuyến $f:\ \mathbb{R}^+ \times X \longrightarrow X$ thỏa mãn

(i) $f\big(\cdot, v\big)$ là hàm đo được đối với mỗi $v \in X$, $f(t,\cdot)$ liên tục hầu khắp đối với $t \in [0,T]$ và

$$\|f\big(t,v\big)\|_X \leq m(t)\theta_f(\|v\|_X), \tag{4.22}$$

với tất cả $v \in X, t \in [0,T]$, ở đây $m \in L_1([0,T]), \theta_f:\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ là hàm liên tục, không giảm.

(ii) Nếu $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ không là nửa nhóm compact thì tồn tại hàm $\eta_f:\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn $\eta_f \in L_1(0,T)$ và

$$\chi\big(f(t,\Omega)\big) \leq \eta_f(t)\, \chi_T(\Omega), \tag{4.23}$$

với tất cả các tập bị chặn $\Omega \subset X$.

Đặt

$$S_1(t) = T(\sigma_1 t), S_2(t) = T(\sigma_2 t), \sigma_1 + \sigma_2 = \rho, \sigma_1\sigma_2 = 1, 0 < \sigma_1 < \sigma_2.$$

Ta kí hiệu $B_R = \{u \in C := C([0,T];X) :\ \|u\|_C \leq R\}$, ở đây R là số thực dương đã được chọn. Ta thấy rằng B_R là tập con đóng, lồi, bị chặn của

$C([0,T];X)$. Ta định nghĩa toán tử nghiệm $F:\ B_R \to C$ như sau:

$$F(u)(t) = S_2(t)(x_0 - g(u)) + \int_0^t S_2(t-s)S_1(s)v_0 ds$$
$$+ \int_0^t \int_0^s S_2(t-s)S_1(s-\tau)f\big(\tau, u(\tau)\big)d\tau ds, \quad (4.24)$$

với mọi $u \in B_R$ và với mọi $t \in [0,T]$.

$$M = \sup_{t\in[0,T]} \|S_2(t)\|_{\mathcal{L}(X)}, \Lambda_T = \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t \|S_2(t-s)S_1(s)\|_{\mathcal{L}(X)} ds,$$

$$\Gamma_T = \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t \int_0^s \|S_2(t-s)S_1(s-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} m(\tau) d\tau ds.$$

$$\Theta_T = \begin{cases} 0, \text{ nếu nửa nhóm } \{T(t)\}_{t\geq 0} \text{ là compact,} \\ \sup\limits_{t\in[0,T]} \int\limits_0^t \int\limits_0^s \|S_2(t-s)S_1(s-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \eta_f(\tau) d\tau ds, \text{ các trường hợp khác.} \end{cases}$$

Bổ đề 4.1. *Giả sử* **(A), (G), (H), (F)** *thỏa mãn và nếu*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\big[M\theta_g(n) + (\theta_h(n) + \sigma_2\theta_g(n))\Lambda_T + \theta_f(n)\Upsilon_T\big] < 1 \quad (4.25)$$

thì luôn tồn tại số thực dương R để sao cho $F(B_R) \subset B_R$.

Bổ đề 4.2. *Giả sử các giả thiết của Bổ đề 4.1 thỏa mãn. Khi đó*

$$\chi_T\big(F(D)\big) \leq \Big[M\eta_g + 4\big(\eta_h + \sigma_2\xi_g\big)\Lambda_T + 8\Theta_T\Big]\chi_T(D), \quad (4.31)$$

với tất cả các tập bị chặn $D \subset B_R$.

Định lý 4.1. *Giả sử các giả thiết của Bổ đề 4.2 được thỏa mãn và*

$$l := M\eta_g + 4(\eta_h + \sigma_2\xi_g)|\Lambda_T + 8\Theta_T < 1. \quad (4.41)$$

Khi đó bài toán (4.8)-(4.9) có ít nhất một nghiệm trên $[0,T]$.

4.3. Sự tồn tại nghiệm mềm phân rã của bài toán

Ta xét toán tử nghiệm F trên tập sau:

$$BC_R^\gamma(\beta) = B_R \cap \big\{v \in BC(\mathbb{R}^+;X) :\ \sup_{t\in\mathbb{R}^+} e^{\gamma t}\|v(t)\|_X \leq \beta\big\},$$

ở đây B_R là hình cầu đóng trong $BC(\mathbb{R}^+; X)$ có tâm tại gốc, bán kính $R; \beta$ và γ là các số thực dương sẽ được lựa chọn sau.

Trong mục này ta sử dụng các giả thiết:

($\mathbf{A}^*$) Toán tử $-\mathcal{A}$ là phần tử sinh của C_0-nửa nhóm liên tục chuẩn $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sao cho $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Ce^{-\delta t},\ t \geq 0$, ở đây C, δ là các hằng số dương.

($\mathbf{G}^*$) Giả thiết **(G)** thỏa mãn với bất kỳ $T > 0$.

($\mathbf{H}^*$) Giả thiết **(H)** thỏa mãn với bất kỳ $T > 0$.

($\mathbf{F}^*$) Giả thiết **(F)** thỏa mãn với $\theta_f(r) = r,\ \eta_f \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$ và $m \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ sao cho

$$K = \sup_{s\geq 0} \int_0^s e^{-(\delta\sigma_1-\gamma)(s-\tau)} m(\tau)d\tau < +\infty.$$

Ta đặt

$$M_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|S_2(t)\|_{\mathcal{L}(X)}, \Lambda_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \int_0^t \|S_2(t-s)S_1(s)\|_{\mathcal{L}(X)} ds,$$

$$\Gamma_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \int_0^t \int_0^s \|S_2(t-s)S_1(s-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} m(\tau)d\tau ds.$$

$$\Theta_\infty = \begin{cases} 0, \text{ nếu nửa nhóm } \{T(t)\}_{t\geq 0} \text{ là compact,} \\ \sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+} \int\limits_0^t \int\limits_0^s \|S_2(t-s)S_1(s-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \eta_f(\tau)d\tau ds, \text{ các trường hợp khác.} \end{cases}$$

Trong các phát biểu và chứng minh dưới đây, ta luôn chọn $\gamma \in (0, \delta\sigma_1]$ là cố định.

Bổ đề 4.3. *Giả sử* **($\mathbf{A}^*$), ($\mathbf{G}^*$), ($\mathbf{H}^*$), ($\mathbf{F}^*$)** *thỏa mãn và nếu*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big[M_\infty\theta_g(n) + \big(\theta_h(n) + \sigma_2\theta_g(n)\big)\Lambda_\infty\Big] + \Gamma_\infty < 1, \tag{4.42}$$

$$\text{và} \quad \frac{KC^2}{\delta\sigma_2 - \gamma} < 1 \tag{4.43}$$

thì tồn tại các số dương R, β sao cho $F\big(BC^\gamma_R(\beta)\big) \subset BC^\gamma_R(\beta)$.

Bổ đề 4.4. *Giả sử* **($\mathbf{A}^*$), ($\mathbf{G}^*$), ($\mathbf{H}^*$), ($\mathbf{F}^*$)** *thỏa mãn. Khi đó ta luôn có*

$$\chi^*\big(F(D)\big) \leq \Big[M_\infty\eta_g + 4\big(\eta_h + \sigma_2\xi_g\big)\Lambda_\infty + 8\Theta_\infty\Big]\chi^*(D), \tag{4.51}$$

với tất cả các tập bị chặn $D \subset BC^\gamma_R(\beta)$.

Định lý 4.2. *Giả sử các giả thiết của Bổ đề 4.3 thỏa mãn và*

$$l_\infty := M_\infty \eta_g + 4\big(\eta_h + \sigma_2 \xi_g)\Lambda_\infty\big) + 8\Theta_\infty < 1. \tag{4.59}$$

Khi đó bài toán (4.8), (4.9) có ít nhất một nghiệm mềm xác định trên $\mathbb{R}^+$ *thỏa mãn* $e^{\gamma t}\|u(t)\|_X = O(1)$ *khi* $t \to +\infty$.

KẾT LUẬN

1. Kết quả đạt được

1. Sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm yếu trên $[0, +\infty)$ của bài toán giá trị biên ban đầu đối với phương trình hyperbolic nửa tuyến tính cấp cao trong các hình trụ không trơn.

2. Sự tồn tại duy nhất và biểu diễn tính chính quy của nghiệm yếu trên $[0, T]$ $(0 < T < +\infty)$ theo biến thời gian trong không gian Sobolev có trọng của bài toán Dirichlet-Cauchy đối với phương trình hyperbolic nửa tuyến tính cấp hai trong miền có cạnh, miền nón có cạnh.

3. Sự tồn tại nghiệm mềm phân rã tốc độ theo cấp mũ của phương trình truyền sóng nửa tuyến tính với cấu trúc tắt dần cùng điều kiện ban đầu không địa phương trong miền trơn và miền không trơn với điểm nón trên biên trong $\mathbb{R}^2$, phương trình của bài toán xét với lớp hàm phi tuyến có giá trị trong không gian Banach liên tục bị chặn.

2. Kiến nghị một số vấn đề nghiên cứu tiếp theo

Xuất phát từ các kết quả đã đạt được trong quá trình nghiên cứu, một số vấn đề mà chúng tôi muốn kiện nghị cần tiếp tục nghiên cứu:

- Biểu diễn tiệm cận của nghiệm của bài toán Dirichlet-Cauchy đối với phương trình hyperbolic phi tuyến trong các miền có cạnh.
- Sự tồn tại duy nhất, tính chính quy, biểu diễn tiệm cận của nghiệm của bài toán Dirichlet-Cauchy đối với phương trình hyperbolic phi tuyến trong miền đa diện.
- Sự tồn tại nghiệm mềm phân rã của phương trình truyền sóng có cấu trúc tắt dần với trễ vô hạn cùng điều kiện ban đầu không địa phương.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH ĐÃ CÔNG BỐ CỦA LUẬN ÁN

Các kết quả chính đã được công bố trong 03 bài báo trên các tạp chí khoa học quốc tế uy tín (01 bài báo trong danh mục ISI)

1. Vu Trong Luong, Nguyen Thanh Tung, "The first initial boundary value problem for nonlinear hyperbolic equations of higher order in cylinders with singular points", International journal of evolution equations 2015, Volume 9, Number 2, pp. 167-180
2. Vu Trong Luong, Nguyen Thanh Tung, "The Dirichlet-Cauchy problem for nonlinear hyperbolic equations in a domain with edges", Nonlinear Analysis 125 (2015) 457-467
3. Vu Trong Luong, Nguyen Thanh Tung, "Decay mild solutions for elastic systems with structural damping involving nonlocal conditions", ISSN 1063-4541, Vestnik St. Petersburg University, Mathematics, 2017, Vol. 50, No. 1, pp. 55-67.

Thêm nữa các kết quả của luận án đã được báo cáo tại:

- Đại hội Toán học toàn quốc lần thứ VIII, Nha Trang, 08/2013;
- Hội thảo khoa học "Toán học giải tích và ứng dụng", Đại học Hồng Đức, 26-28/5/2016;
- Semina của Bộ môn Giải tích, Khoa Toán-Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội;