BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

*

NGUYỄN THANH TÙNG

BÀI TOÁN BIÊN ĐỐI VỚI MỘT SỐ LỚP PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN SÓNG TRONG MIỀN KHÔNG TRƠN

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2017

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

*

NGUYỄN THANH TÙNG

BÀI TOÁN BIÊN ĐỐI VỚI MỘT SỐ LỚP PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN SÓNG TRONG MIỀN KHÔNG TRƠN

Chuyên ngành: Phương trình vi phân và tích phân
Mã số: 62 46 01 03

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

TẬP THỂ HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
1. TS. Vũ Trọng Lưỡng
2. GS.TSKH. Nguyễn Mạnh Hùng

HÀ NỘI - 2017

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi dưới sự hướng dẫn của TS. Vũ Trọng Lưỡng và GS. TSKH. Nguyễn Mạnh Hùng. Các kết quả được phát biểu trong luận án là hoàn toàn trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất cứ một công trình nào khác.

Nghiên cứu sinh

Nguyễn Thanh Tùng

LỜI CẢM ƠN

Luận án được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình, chu đáo của TS. Vũ Trọng Lưỡng và GS.TSKH. Nguyễn Mạnh Hùng. Ngoài những chỉ dẫn về mặt khoa học, các thầy còn tạo động lực lớn giúp tác giả tự tin, say mê và quyết tâm nghiên cứu.

Tác giả xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc TS. Vũ Trọng Lưỡng và GS.TSKH Nguyễn Mạnh Hùng. Tác giả cũng xin được tỏ lòng biết ơn lớn lao tới các thầy cô trong bộ môn Giải tích, đặc biệt là PGS. TS. Trần Đình Kế và PGS. TS. Cung Thế Anh đã tận tình chỉ bảo cho tác giả trong quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận án. Tác giả cảm ơn các bạn nghiên cứu sinh đã đóng góp nhiều ý kiến quý báu cho luận án của tác giả.

Tác giả xin được bày tỏ cảm ơn tới Ban Giám hiệu, phòng Sau Đại học, khoa Toán - Tin Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã tạo điều kiện thuận lợi để tác giả hoàn thành quá trình học tập, nghiên cứu của mình. Tác giả xin được bày tỏ cảm ơn đến Ban Giám hiệu Trường Đại học Tây Bắc, các thầy cô và các anh chị đồng nghiệp công tác tại khoa Toán-Lý-Tin, Trường TH, THCS & THPT Chu Văn An đã luôn tạo điều kiện thuận lợi, giúp đỡ và động viên tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Sau cùng, tác giả bày tỏ lòng biết ơn tới gia đình, người thân và gia đình TS. Vũ Trọng Lưỡng - những người luôn yêu thương, chia sẻ, đùm bọc, động viên tác giả vượt qua khó khăn để hoàn thành quá trình học tập và nghiên cứu của khóa học NCS.

Tác giả

Mục lục

Lời cam đoan 1

Lời cảm ơn 2

Mục lục 3

Một số kí hiệu dùng trong luận án 6

MỞ ĐẦU 8

1. Lịch sử vấn đề và lí do chọn đề tài 8

2. Mục đích, đối tượng và phạm vi nghiên cứu 11

3. Phương pháp nghiên cứu 12

4. Kết quả của luận án 12

5. Cấu trúc của luận án 13

Chương 1. MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ 14

1.1. Không gian các hàm, hội tụ yếu, các định lý nhúng 14

1.1.1. Một số không gian hàm 14

1.1.2. Hội tụ yếu 17

1.1.3. Định lý nhúng Sobolev và định lý nhúng Rellich-Kondrachov 18

1.2. Một số bất đẳng thức 19

1.2.1. Bất đẳng thức Cauchy và bất đẳng thức Young . . . 19

1.2.2. Bất đẳng thức Hölder 19

1.2.3. Một số phát biểu của bất đẳng thức Gronwall 20

1.2.4. Bất đẳng thức Gagliardo-Nirenberg 21

1.3. Một số kiến thức căn bản về lí thuyết toán tử 22

1.4. Một số bổ đề nhúng trong miền có cạnh, bài toán Dirichlet đối với phương trình elliptic cấp hai trong miền đa diện . . 25

1.4.1. Một số bổ đề nhúng trong miền có cạnh 25

1.4.2. Bài toán Dirichlet đối với phương trình elliptic cấp hai trong miền đa diện 27

1.5. Một số bổ đề nhúng và bài toán Dirichlet đối với phương trình elliptic mạnh trong miền nón có cạnh 27

1.5.1. Miền nón có cạnh 27

1.5.2. Một số bổ đề nhúng 28

1.5.3. Bài toán Dirichlet đối với hệ elliptic mạnh trong miền nón có cạnh 28

1.6. Một số kiến thức căn bản về lí thuyết nửa nhóm các toán tử tuyến tính bị chặn 30

1.7. Một số kiến thức căn bản về độ đo không compact và ánh xạ nén 35

Chương 2. BÀI TOÁN BIÊN BAN ĐẦU ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH HYPERBOLIC NỬA TUYẾN TÍNH TRONG TRỤ KHÔNG TRƠN 41

2.1. Thiết lập bài toán 41

2.2. Sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm yếu địa phương . . 44

2.3. Sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm yếu toàn cục 59

Chương 3. BÀI TOÁN DIRICHLET-CAUCHY ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH HYPERBOLIC NỬA TUYẾN TÍNH TRONG CÁC MIỀN ĐA DIỆN 63

3.1. Bài toán Dirichlet-Cauchy đối với phương trình hyperbolic nửa tuyến tính trong miền có cạnh 63

3.1.1. Mở đầu 63

3.1.2. Bài toán tuyến tính 65

3.1.3. Bài toán nửa tuyến tính 81

3.2. Bài toán Dirichlet-Cauchy đối với phương trình hyperbolic nửa tuyến tính trong miền nón có cạnh 87

3.2.1. Mở đầu 87

3.2.2. Bài toán tuyến tính 88

3.2.3. Bài toán nửa tuyến tính 92

Chương 4. PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN SÓNG NỬA TUYẾN TÍNH VỚI CẤU TRÚC TẮT DẦN 107

4.1. Thiết lập bài toán 107

4.1.1. Ví dụ mở đầu 107

4.1.2. Bài toán 109

4.2. Sự tồn tại nghiệm mềm của bài toán 111

4.3. Sự tồn tại nghiệm mềm phân rã của bài toán 118

KẾT LUẬN 126

1. Kết quả đạt được 126

2. Kiến nghị một số vấn đề nghiên cứu tiếp theo 126

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH ĐÃ CÔNG BỐ CỦA LUẬN ÁN 127

TÀI LIỆU THAM KHẢO 128

MỘT SỐ KÍ HIỆU THƯỜNG DÙNG TRONG LUẬN ÁN

Chúng tôi sử dụng các ký hiệu $\mathbb{N}$ là tập các số tự nhiên, $\mathbb{R}$ là tập số thực. Với mỗi $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ và đa chỉ số $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, ta ký hiệu $x^\alpha = x^{\alpha_1} \cdots x^{\alpha_n}$ và $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i,\ \alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_n!$.

Với đa chỉ số $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}$, ta ký hiệu

$$D^\alpha := D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \cdots D_{x_n}^{\alpha_n}, \quad \partial^\alpha := \partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}.$$

Thêm nữa, ta ký hiệu $u_{t^k} = \dfrac{\partial^k u}{\partial t^k}$ và $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \dfrac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!}$. Các miền và không gian các hàm được ký hiệu như sau:

- Ω ký hiệu miền (mở liên thông) bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ với biên $\partial\Omega$.
- $\overline{\Omega}$ ký hiệu hợp của Ω và $\partial\Omega$.
- Q_T ký hiệu tích Descartes của Ω và $(0, T)$, với $0 < T \leq \infty$.
- S_T ký hiệu tích Descartes của $\partial\Omega$ và $(0, T)$, với $0 < T \leq \infty$.
- $\mathcal{K}$ ký hiệu nón trong $\mathbb{R}^3$ với đỉnh tại gốc 0 với biên $\partial\mathcal{K}$.
- $\mathcal{K}_T$ ký hiệu tích Descartes của nón $\mathcal{K}$ với $(0, T)$.
- $\partial\mathcal{K}_T$ ký hiệu tích Descartes của $\bigcup\limits_{i=1}^{d} \Gamma_i$ với $(0, T)$, trong đó Γ_i là các mặt nhẵn của nón $\mathcal{K}$.
- $C^k(\Omega)$ ký hiệu không gian các hàm có đạo hàm liên tục đến cấp k trong $\Omega,\ 0 \leq k \leq \infty$.
- $C_0^k(\Omega)$ ký hiệu không gian các hàm khả vi cấp k có giá compact trong $\Omega,\ 0 \leq k \leq \infty$.

- $L_p(\Omega)$ ký hiệu không gian Banach gồm tất cả các hàm khả tổng cấp $p,\ 1 \leq p < \infty$ theo nghĩa Lebesgue trong Ω.
- $L_\infty(\Omega)$ ký hiệu không gian Banach gồm tất cả các hàm đo được và bị chặn hầu khắp nơi trên Ω.
- $L_p(0,T;X)$ ký hiệu không gian tất cả các hàm khả tổng từ $[0,T]$ vào không gian Banach X với $1 \leq p < \infty$.
- $L_\infty(0,T;X)$ ký hiệu không gian các hàm u xác định trên $[0,T]$ có giá trị trong X đồng thời với mỗi $t, u(t)$ đo được và bị chặn hầu khắp nơi trên X.
- $H^k(\Omega)$ ký hiệu không gian Hilbert bao gồm tất cả hàm khả tổng địa phương u trên Ω sao cho $D^\alpha u$ tồn tại thuộc $L_p(\Omega)$.
- $\mathring{H}^k(\Omega)$ ký hiệu không gian Hilbert bao gồm các hàm $u \in H^k(\Omega)$ sao cho $D^\alpha u = 0$ trên $\partial\Omega$ với tất cả $|\alpha| \leq k-1$.
- $H^{-k}(\Omega)$ ký hiệu không gian đối ngẫu của $\mathring{H}^k(\Omega)$.
- $H^m_\gamma(\Omega)$ ký hiệu không gian Sobolev có trọng $\gamma \in \mathbb{R}$ gồm các hàm $v \in \mathcal{D}'(\Omega)-$ không gian $C_0^\infty(\Omega)$ được trang bị tô pô compact sao cho $r^{\gamma+|\alpha|-m} D^\alpha v \in L_2(\Omega), |\alpha| \leq m, r = |x|$.
- $V_a^{l,p}(\Omega)$ ký hiệu không gian Sobolev có trọng $a \in \mathbb{R}$, là bao đóng của $C_0^\infty(\overline{\Omega} \setminus l_0)$, ở đó Ω là miền với biên $\partial\Omega$ gồm hai siêu phẳng Γ_1, Γ_2 có giao là đa tạp l_0 và $1 < p < \infty, H_a^l(\Omega) = V_a^{l,2}(\Omega)$.
- $V^l_{\beta,\delta}(\mathcal{K})$ ký hiệu bao đóng của $C_0^\infty(\mathcal{K} \setminus S), S = \{0\} \cup M_1 \cdots \cup M_d$, với $\beta \in \mathbb{R}, \delta = (\delta_1, \cdots, \delta_d) \in \mathbb{R}^d, M_i$ là các cạnh của nón $\mathcal{K}$.

MỞ ĐẦU

1. Lịch sử vấn đề và lí do chọn đề tài

Các bài toán biên tuyến tính đối với phương trình, hệ phương trình đạo hàm riêng trong các miền với biên trơn [3] đã được các nhà toán học nghiên cứu khá hoàn thiện ở nữa đầu thế kỷ XX. Các bài toán biên loại dừng trong các miền trơn đã được nghiên cứu nhờ phép phân hoạch đơn vị để đưa bài toán đang xét về bài toán trong toàn không gian và nửa không gian [19, 24, 27]. Các bài toán biên không dừng trong các hình trụ với đáy là miền có biên trơn được nghiên cứu nhờ phép biến đổi Laplace hoặc phép biến đổi Fourier để đưa về bài toán dừng với tham biến trong miền trơn.

Từ giữa thế kỷ XX, bài toán biên tổng quát đối với phương trình elliptic trong miền với biên kỳ dị đã được nghiên cứu, các kết quả quan trọng về tính đặt đúng của bài toán cũng như tính trơn và tiệm cận của nghiệm trong miền với các điểm nón trên biên đã nhận được [49, 50]. Nhà khoa học V.A.Kondratiev đã giải quyết được một số vấn đề mang tính nguyên lí để khắc phục điểm kì dị kiểu nón của bài toán biên tổng quát đối với phương trình elliptic. Tiếp theo, một số nhà toán học khác đã dựa trên các phương pháp của V.A.Kondratiev để nghiên cứu các bài toán biên đối với các hệ dừng trong các miền với các điểm kỳ dị trên biên [15, 25, 26, 51, 47, 52, 53]. Bài toán biên tổng quát đối với phương trình elliptic trong miền đa diện đã được V. Maz'ya, J. Rossomann nghiên cứu về tính giải được trong các không gian L_2 Sobolev có trọng, không gian Hölder có trọng trong các miền nhị diện, miền nón có cạnh, miền kiểu đa diện [60], những kết quả căn bản của toán tử pencil đã được áp dụng trong việc khẳng định tính giải được của bài toán. Những kết quả đạt được của bài toán biên tổng quát đối với phương trình elliptic trong các miền có điểm nón, miền có điểm lùi, miền có cạnh, miền kiểu đa giác... là cơ sở quan trọng cho các

kết quả nghiên cứu về các bài toán biên đối với phương trình, hệ phương trình không dừng.

Cho đến những năm của thập niên 90 của thế kỷ XX, bởi các phương pháp như là phép biến đổi Fourier, phép biến đổi Laplace... chưa đủ mạnh để giúp chúng ta khẳng định những kết quả quan trọng của các bài toán không dừng trong các miền không trơn. Cuối thế kỷ XX, nhờ phương pháp cắt thiết diện, bài toán không dừng đã được xét trên một thiết diện như là một bài toán dừng [31, 32, 34, 38, 39, 40, 35, 36, 43, 44, 57]. Với phương pháp này, bài toán không dừng với hệ số phụ thuộc thời gian đã được khảo sát, thể hiện ở tính đặt đúng của bài toán không dừng trong miền bất kỳ và biểu diễn tiệm cận của nghiệm gần điểm nón trên biên trong [32]. Trong cùng khoảng thời gian này, các kết quả về tính giải được, tính trơn của nghiệm suy rộng theo biến thời gian đối với bài toán biên ban đầu thứ nhất, thứ hai trong các trụ với đáy là miền với biên bất kỳ đã được xác định. Đặc biệt, tính trơn của nghiệm theo biến không gian của bài toán biên đối với hệ phương trình hyperbolic trong các trụ với đáy là miền chứa điểm nón, điểm góc đã khẳng định trong [31]. Biểu diễn tiệm cận của nghiệm gần điểm nón của bài toán biên tổng quát đối với hệ hyperbolic trong trụ với đáy là miền chứa điểm nón cũng đã nhận được sau đó. Nhìn lại, các kết quả đạt được của các bài toán không dừng mới chỉ xét trong các trụ hữu hạn có đáy là miền không trơn. Các kết quả nhận được sau đó đối với phương trình không dừng parabolic, trong các công trình [38, 40, 39, 35, 57] bài toán không dừng parabolic được xét trong các trụ vô hạn với biên không trơn và đã thu được tính đặt đúng, biểu diễn tiệm cận của nghiệm khi biến thời gian tiến ra vô cùng. Tính chính quy của nghiệm của bài toán biên tổng quát trong trụ vô hạn với đáy chứa điểm nón được đưa ra trong [36] và của bài toán biên ban đầu đối với hệ không dừng parabolic cấp hai trong trụ hữu hạn với đáy là đa giác được đề cập trong [57].

Với những kết quả quan trọng của bài toán giá trị biên ban đầu đối với phương trình elliptic của các nhà khoa học V. A. Kondratiev, V. G. Maz'ya và B. A. Plamenevskii đạt được trong các miền trụ không trơn

khác nhau như miền với đáy chứa điểm nón, miền với đáy là đa giác, miền với đáy chứa điểm lùi, điểm đỉnh..., đã có một số công trình trong nước của Nguyễn Mạnh Hùng cùng các cộng sự đạt được về tính duy nhất nghiệm, tính chính quy, biểu diễn tiệm cận nghiệm gần điểm kỳ dị (điểm nón, điểm lùi, điểm đỉnh). Đặc biệt, bằng phương pháp xấp xỉ Galerkin, tính trơn của nghiệm suy rộng theo biến thời gian đã nhận được từ bài toán giá trị biên ban đầu thứ nhất đối với phương trình hyperbolic bậc cao trong trụ vô hạn với biên bất kỳ [33]. Cùng phương pháp này, trong [46], sự tồn tại duy nhất của nghiệm suy rộng của bài toán hỗn hợp thứ nhất đối với phương trình hyperbolic cấp cao trong trụ không trơn vô hạn đã được khẳng định. Khi xét đến bài toán giá trị biên ban đầu đối với phương trình hyperbolic bậc cao trong các miền với điểm nón [37], bằng phương pháp xấp xỉ Galerkin, Nguyễn Mạnh Hùng cùng cộng sự đã thu được các kết quả về tính giải được duy nhất, tính chính quy của nghiệm trong không gian Sobolev, biểu diễn tiệm cận của nghiệm gần điểm nón. Bởi việc áp dụng phương pháp xấp xỉ biên, Nguyễn Mạnh Hùng, Vũ Trọng Lưỡng đã thu được tính giải được duy nhất, tính trơn của nghiệm theo biến thời gian của bài toán giá trị biên ban đầu đối với các hệ phương trình hyperbolic cấp cao trong trụ với đáy là miền chứa điểm đỉnh [41], tính chính quy của nghiệm của bài toán giá trị biên ban đầu đối với phương trình hyperbolic cấp cao trong hình trụ với đáy chứa điểm lùi trên biên [42] đã thu được.

Phương trình truyền sóng phi tuyến với cấu trúc tắt dần trên miền trơn bất kỳ mà trong đó có hệ đàn hồi với cấu trúc tắt dần đã được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm, nghiên cứu trong khoảng bốn thập kỉ trở lại đây. Năm 1982, G. Chen và D. L. Russell [11] đã nghiên cứu về toán tử đàn hồi và toán tử tắt dần và đã đạt được một số kết quả về hệ thức liên hệ giữa các toán tử đàn hồi và toàn tử tắt dần. Năm 1998, Huang [30] đã phát triển bài toán, ở đó có sự thay thế toán tử đàn hồi. Năm 2013, các nhà toán học Fan, Li và Chen [22] đã thu được sự tồn tại của nghiệm mềm trong các không gian Banach với hằng số tắt dần $\rho \geq 2$ và hàm phi tuyến f là hàm Lipschitz theo biến thứ hai. Năm 2014, tính giải tích và tính ổn định mũ của nửa nhóm sinh bởi hệ đàn hồi với cấu trúc tắt dần đã được Fan và Ly nghiên cứu trong công trình [23]. Cùng năm

này, trong [21] Fan và Gao đã đạt được các kết quả về biểu diễn tiệm cận của nghiệm của hệ đàn hồi với cấu trúc tắt dần trong không gian Banach.

Trước những kết quả đạt được đối với bài toán biên ban đầu đối với phương trình hyperbolic trong các miền trụ không trơn, đặt ra vấn đề nếu bổ sung hạng tử nhiễu phi tuyến vào phương trình hyperbolic nửa tuyến tính xét trong trụ không trơn vô hạn thì tính giải được của bài toán như thế nào. Thay vì miền với điểm nón, điểm lùi, điểm góc... là miền có cạnh thì tính giải được, tính chính quy của nghiệm theo biến thời gian của bài toán biên ban đầu đối với phương trình hyperbolic cấp hai phi tuyến được thể hiện ra sao. Nhìn nhận về phương pháp, cách tiếp cận giải quyết bài toán biên ban đầu đối với phương trình hyperbolic trong miền có cạnh có giống như cách tiếp cận của cùng bài toán trong miền có điểm lùi, điểm nón, điểm đỉnh không. Thêm nữa, trong quá trình nghiên cứu về hệ đàn hồi đối với cấu trúc tắt dần, chúng tôi nhận thấy rằng các kết quả đạt được về sự tồn tại, tính phân rã của nghiệm mềm của bài toán mới chỉ đạt được đối với lớp hàm phi tuyến có tính chất Lipschitz, các toán tử trong phương trình xét trên miền trơn. Từ những vấn đề nêu trên, chúng tôi quyết định nghiên cứu bài toán biên đối với một số lớp phương trình truyền sóng trong miền không trơn. Trong đó chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu toàn cục, nghiệm yếu địa phương của bài toán biên ban đầu đối với phương trình hyperbolic nửa tuyến tính trong các trụ không trơn, trong các miền đa diện. Hơn nữa, chúng tôi nghiên cứu nghiệm mềm phân rã theo tốc độ mũ của bài toán giá trị ban đầu không địa phương đối với phương trình vi phân cấp hai nửa tuyến tính trong không gian Banach với cấu trúc tắt dần trên miền trơn và không trơn.

2. Mục đích, đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại, tính duy nhất của nghiệm yếu trên $[0, \infty)$ trong các không gian Sobolev có trọng của bài toán biên ban đầu đối với các phương trình hyperbolic nửa tuyến tính cấp cao trong các trụ không trơn; nghiên cứu sự tồn tại duy nhất và tính chính quy theo biến thời gian của nghiệm yếu trên $[0, T]$ của bài toán biên ban đầu đối với phương trình hyperbolic nửa tuyến tính cấp hai trong các miền có cạnh,

miền nón có cạnh. Thêm nữa, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại, tính phân rã tốc độ theo cấp mũ của nghiệm mềm của bài toán giá trị ban đầu không địa phương đối với phương trình vi phân cấp hai nửa tuyến tính trong không gian Banach với cấu trúc tắt dần trên miền trơn và không trơn, thành phần phi tuyến trong phương trình được xét đến thuộc lớp hàm có giá trị trong không gian Banach liên tục bị chặn.

3. Phương pháp nghiên cứu

- Trong luận án, chúng tôi sử dụng phương pháp xấp xỉ Galerkin và các định lý nhúng trong các không gian Sobolev chứng minh sự tồn tại duy nhất của nghiệm yếu trên $[0, T]$ $(0 < T < \infty)$, sử dụng phương pháp thác triển nghiệm chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu trên $[0, \infty)$ của các bài toán biên ban đầu đối với phương trình hyperbolic nửa tuyến tính bậc cao. Thêm nữa, chuyển qua bài toán tuyến tính, áp dụng phương pháp điểm bất động, chúng tôi khẳng định sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu trên $[0, T]$ $(0 < T < \infty)$ trong không gian Sobolev có trọng của bài toán biên ban đầu đối với phương trình hyperbolic nửa tuyến tính cấp hai trong miền có cạnh, miền nón có cạnh. Sử dụng phương pháp chuyển qua bài toán biên ban đầu đối với hệ không dừng về bài toán elliptic chứa tham số, áp dụng kết quả đối với bài toán biên elliptic trên miền đa diện nghiên cứu tính chính quy của nghiệm yếu của bài toán này.
- Áp dụng các kết quả của lý thuyết nửa nhóm, độ đo không compact, phương pháp điểm bất động đối với ánh xạ nén, chúng tôi khẳng định sự tồn tại nghiệm mềm phân rã tốc độ theo cấp mũ của phương trình truyền sóng nửa tuyến tính với cấu trúc tắt dần cùng điều kiện ban đầu không địa phương.

4. Kết quả của luận án

Luận án đạt được những kết quả chính sau đây:

- Sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu trên $[0, \infty)$ của bài toán biên ban đầu đối với phương trình hyperbolic nửa tuyến tính cấp cao trong trụ không trơn.

- Sự tồn tại duy nhất và tính chính quy của nghiệm yếu trên đoạn $[0, T]$ trong không gian Sobolev có trọng của bài toán biên ban đầu đối với phương trình hyperbolic nửa tuyến tính cấp hai trong miền có cạnh và nón có cạnh.
- Sự tồn tại và tính phân rã theo tốc độ mũ của nghiệm mềm của bài toán giá trị ban đầu không địa phương đối với phương trình vi phân cấp hai nửa tuyến tính trong không gian Banach với cấu trúc tắt dần trên miền trơn và không trơn, thành phần phi tuyến trong phương trình được xét đến thuộc lớp hàm có giá trị trong không gian Banach liên tục bị chặn.

Các kết quả của luận án là mới, có ý nghĩa khoa học, và góp phần vào việc hoàn thiện các kết quả thu được trước đó của bài toán biên đối với phương trình truyền sóng trên một số miền không trơn.

Các kết quả chính đã được công bố trong 03 bài báo trên các tạp chí khoa học quốc tế uy tín (có 01 bài báo trong danh mục ISI) và đã được báo cáo tại:

- Đại hội Toán học toàn quốc lần thứ VIII, Nha Trang, 08/2013;
- Hội thảo khoa học "Toán học giải tích và ứng dụng", Đại học Hồng Đức, 26-28/5/2016;
- Semina của Bộ môn Giải tích, Khoa Toán-Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội.

5. Cấu trúc của luận án

Luận án gồm 4 chương:

Chương 1: Một số kiến thức chuẩn bị

Chương 2: Bài toán biên ban đầu đối với phương trình hyperbolic nửa tuyến tính trong các trụ không trơn

Chương 3: Bài toán Dirichlet-Cauchy đối với phương trình hyperbolic nửa tuyến tính trong các miền đa diện

Chương 4: Phương trình truyền sóng nửa tuyến tính với cấu trúc tắt dần.

Chương 1

MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này, chúng tôi nhắc lại một số không gian hàm; kiến thức căn bản về lý thuyết toán tử tuyến tính; một số bất đẳng thức sẽ được sử dụng trong chứng minh các bổ đề, định lý; bài toán Dirichlet đối với phương trình elliptic mạnh trong miền đa diện; bài toán Dirichlet đối với hệ elliptic mạnh trong miền nón có cạnh; một số kiến thức căn bản của lý thuyết nửa nhóm các toán tử tuyến tính bị chặn; một số kiến thức căn bản về độ đo không compact và ánh xạ nén tương ứng với độ đo không compact. Nội dung kiến thức của chương được xác định trong các bài báo, tài liệu chuyên khảo [1, 4, 17, 18, 19, 20, 48, 56, 60, 63, 65].

1.1. Không gian các hàm, hội tụ yếu, các định lý nhúng

1.1.1. Một số không gian hàm

1. Giả sử X là không gian Banach với chuẩn $\|\cdot\|_X$. Sử dụng ký hiệu trong [19], ta có $C\big([0,T];X\big)$ là không gian bao gồm các hàm liên tục $u:\ [0,T]\to X$ với chuẩn $\|u\|_{C([0,T];X)} = \max\limits_{0\le t\le T}\|u(t)\|_X < \infty$. Với mỗi $1\le p<\infty$ và $0<T\le\infty$, không gian $L_p(0,T;X)$ bao gồm tất cả các hàm khả tổng $u:\ [0,T]\to X$, xác định với chuẩn

$$\|u\|_{L_p(0,T;X)} = \Big(\int\limits_0^T \|u(t)\|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty;$$

Không gian $L_\infty(0,T;X)$ bao gồm các hàm u xác định trên $[0,T]$ có giá trị trong X, đồng thời với mỗi $t\in[0,T], u(t)$ đo được và bị chặn hầu khắp nơi trên X, xác định với chuẩn $\|u\|_{L_\infty(0,T;X)} = ess\sup\limits_{0\le t\le T}\ \|u(t)\|_X < \infty$.

2. Cho $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ $(n\ge 2)$ là một miền bị chặn. Sử dụng các kí hiệu trong [19, Chương 5], với $1\le p\le\infty$ và m là số nguyên không âm, ta có

Định nghĩa 1.1. Giả sử $u, v \in L^1_{loc}(\Omega), \alpha$ là một đa chỉ số. Ta nói rằng v là đạo hàm yếu cấp α của u, kí hiệu $D^\alpha u = v$, nếu

$$\int\limits_\Omega u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega v\phi dx$$

thỏa mãn đối với tất cả các hàm thử $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Định nghĩa 1.2. Không gian Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ bao gồm tất cả các hàm khả tổng địa phương $u : \Omega \to \mathbb{R}$ sao cho với mỗi đa chi số $\alpha, |\alpha| \leq m, D^\alpha u$ tồn tại theo nghĩa yếu và thuộc $L_p(\Omega)$.

Kí hiệu $\mathring{W}^{m,p}(\Omega)$ là bao đóng của $C_0^\infty(\Omega)$ trong $W^{k,p}(\Omega)$.

Trong trưởng hợp $p = 2$, ta thường viết $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$, $m = 0, 1, 2, \cdots$. Ta có $H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$. Với mỗi $u \in W^{m,p}(\Omega)$, ta định nghĩa chuẩn của nó xác định bởi

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \Big(\sum\limits_{|\alpha|\leq m} \int\limits_\Omega |D^\alpha u|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} & \text{nếu } 1 \leq p < \infty, \\ \sum\limits_{|\alpha|\leq m} ess \sup\limits_{x\in\Omega} \ |D^\alpha u(x)| & \text{nếu } p = \infty. \end{cases}$$

Với mỗi $m \in \mathbb{N}^*, W^{m,p}(\Omega)$ cùng với chuẩn $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ là không gian Banach. Nói riêng, $H^m(\Omega)$ cũng là không gian Banach và nếu trong $H^m(\Omega)$ ta trang bị tích vô hướng

$$(u, v) = \sum_{|\alpha|\leq m} \int\limits_\Omega D^\alpha u \overline{D^\alpha v} dx$$

thì $H^m(\Omega)$ là không gian Hilbert. Ta kí hiệu $\mathring{H}^m(\Omega)$ bao gồm tất cả các hàm $u \in H^m(\Omega)$ sao cho $D^\alpha u = 0$ (với tất cả $|\alpha| \leq m - 1$) trên biên $\partial\Omega$ của Ω và được gọi là bao đóng của $C_0^\infty(\Omega)$ trong $H^m(\Omega)$. $H^{-m}(\Omega)$ được gọi là không gian đối ngẫu của $\mathring{H}^m(\Omega)$.

Với $\gamma \in \mathbb{R}$ và $x \in \Omega$, ký hiệu $r = |x|$, ta có không gian Sobolev có trọng $H^m_\gamma(\Omega) = \{v \in \mathcal{D}'(\Omega) : \ r^{\gamma+|\alpha|-m} D^\alpha v \in L_2(\Omega), |\alpha| \leq m\}$ với chuẩn $\|\cdot\|_{m,\gamma}$ được xác định bởi hệ thức

$$\|v\|_{m,\gamma} = \Big(\sum_{|\alpha|\leq m} \int\limits_\Omega \Big| r^{\gamma+|\alpha|-m} D^\alpha v \Big|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

3. Giả sử Ω là miền có cạnh bị chặn trong $\mathbb{R}^n, n > 2$, với biên $\partial\Omega$ bao gồm hai mặt Γ_1, Γ_2 giao nhau theo đa tạp l_0. Với mỗi $a \in \mathbb{R}$, l là số nguyên không âm và $1 < p < \infty$, ta định nghĩa không gian Sobolev có trọng $V_a^{l,p}(\Omega)$ (xem [60]) như là bao đóng của tập $C_0^\infty(\overline{\Omega} \setminus l_0)$ tương ứng với chuẩn

$$\|u\|_{V_\alpha^{l,p}(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega \sum_{0 \le |\alpha| \le l} \left(r^{p(a+|\alpha|-l)} |D^\alpha u|^p + |u|^p \right) dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

ở đây $r = dist(x, l_0)$. Một chuẩn (xem [60, Bổ đề 2.1.5]) tương đương với $\|\cdot\|_{V_\alpha^{l,p}(\Omega)}$, đó là

$$\|u\| = \left(\int\limits_\Omega \left(r^{p(a-l)} |u|^p + \sum_{|\alpha|=l} r^{pa} |D^\alpha u|^p \right) dx \right)^{\frac{1}{p}}, \ l \ge 1.$$

Để ngắn gọn, ta đặt $H_a^l(\Omega) = V_a^{l,2}(\Omega)$. Từ định nghĩa chuẩn của không gian $V_\alpha^{l,p}(\Omega)$ chúng ta có $V_a^{l,p}(\Omega) \hookrightarrow V_{a-1}^{l-1,p}(\Omega) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow V_{a-l}^{0,p}$.

4. Ta xác định miền nón bị chặn có cạnh $\mathcal{K} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \ \frac{x}{|x|} \in \Omega \right\}$ có đỉnh tại gốc tọa độ. Ta giả sử rằng biên $\partial\mathcal{K}$ bao gồm đỉnh $x = 0$, các cạnh (các nửa đường thẳng) $M_1, \cdots, M_d$ và các mặt nhẵn (lớp C^∞) $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_d$. Điều này cho ta thấy rằng $\Omega = \mathcal{K} \cap S^2$ là một miền kiểu đa giác nằm trên mặt cầu đơn vị S^2 với các cạnh $\gamma_k = \Gamma_k \cap S^2$. Cho $0 < T < \infty$, đặt $\mathcal{K}_T = \mathcal{K} \times (0, T), \partial\mathcal{K}_T = \bigcup\limits_{i=1}^{d} \Gamma_i \times (0, T)$. Ta ký hiệu $S = \{0\} \cup M_1 \cdots \cup M_d$ là tập các điểm biên kỳ dị. Với mỗi số nguyên không âm l và các đại lượng $\beta \in \mathbb{R}, \delta = (\delta_1, \cdots, \delta_d) \in \mathbb{R}^d$, ta ký hiệu $V_{\beta,\delta}^l(\mathcal{K})$ (xem [60]) là bao đóng của $C_0^\infty(\overline{\mathcal{K}} \setminus S)$ tương ứng với chuẩn

$$\|u\|_{V_{\beta,\delta}^l(\mathcal{K})} = \Big(\int\limits_{\mathcal{K}} \sum_{|\alpha| \le l} \rho^{2(\beta+|\alpha|-l)} \prod_{k=1}^{d} \left(\frac{r_k}{\rho} \right)^{2(\delta_k+|\alpha|-l)} |D^\alpha u|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}},$$

ở đây $\rho = |x|$ là khoảng cách từ $x \in \mathcal{K}$ đến gốc tọa độ, r_k là khoảng cách từ $x \in \mathcal{K}$ tới cạnh M_k $(k = 1, \cdots, d)$ tương ứng. Bao đóng $C_0^\infty(\mathcal{K})$ tương ứng với chuẩn $\|\cdot\|_{V_{\beta,\delta}^l(\mathcal{K})}$ được ký hiệu bởi $\mathring{V}_{\beta,\delta}^l(\mathcal{K})$. Từ định nghĩa của $\|\cdot\|_{V_{\beta,\delta}^l(\mathcal{K})}$, ta có các nhúng sau: $V_{\beta,\delta}^l(\mathcal{K}) \hookrightarrow V_{\beta-1,\delta-1}^{l-1}(\mathcal{K}) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow V_{\beta-l,\delta-l}^0(\mathcal{K})$.

1.1.2. Hội tụ yếu

Cho X là không gian định chuẩn, X' là không gian đối ngẫu của X. Ta có định nghĩa và tính chất của hội tụ yếu như sau, xem [20].

Định nghĩa 1.3. a. Một dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ được gọi là hội tụ yếu tới $x \in X$, (kí hiệu: $x_n \rightharpoonup x$) nếu $\varphi(x_n) \to \varphi(x) \quad \forall\, \varphi \in X'$.

b. Một dãy $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X'$ được gọi là hội tụ yếu sao tới $\varphi \in X'$, (kí hiệu: $\varphi_n \overset{\star}{\rightharpoonup} \varphi$) nếu $\varphi_n(x) \to \varphi(x) \quad \forall\, x \in X$.

Mệnh đề 1.1. *Giả sử $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy trong không gian Banach X. Khi đó*

1) Nếu $x_n \rightharpoonup x$ khi $n \to \infty$ thì $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bị chặn và $\|x\|_X \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_X$.

2) Nếu $x_n \rightharpoonup x$ khi $n \to \infty$ và $\|x_n\|_X \to \|x\|_X$ khi $n \to \infty$ thì $x_n \to x$ khi $n \to \infty$.

3) Nếu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bị chặn trong X và nếu tồn tại $x \in X$ và một tập con trù mật D trong X' sao cho $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ khi $n \to \infty$ với mọi $\varphi \in D$ thì $x_n \rightharpoonup x$.

Các tính chất compact dưới đây rất quan trọng cho việc khẳng định sự tồn tại hội tụ yếu, hội tụ yếu sao.

Định lý 1.1. *Nếu dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy bị chặn trong không gian Banach phản xạ thì tồn tại dãy con hội tụ yếu của $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Trong trường hợp đặc biệt, một dãy bị chặn trong không gian Hilbert luôn có dãy con hội tụ yếu.

Định lý 1.2. *Nếu dãy $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X'$ bị chặn trong không gian đối ngẫu X' của không gian Banach X tách được, thì tồn tại dãy con hội tụ yếu sao.*

Áp dụng định lý Hahn-Banach, ta có định lý sau:

Định lý 1.3. *Giả sử X là không gian định chuẩn và dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ trong X hội tụ yếu tới x. Nếu $\Omega \subset X$ là tập con lồi và đóng chứa $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ thì $x \in \Omega$.*

1.1.3. Định lý nhúng Sobolev và định lý nhúng Rellich-Kondrachov

Tham khảo [1], ta có khái niệm và các định lý nhúng sau:

Định nghĩa 1.4. Giả sử X, Y là các không gian định chuẩn tương ứng với chuẩn $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$. Ta nói rằng X nhúng liên tục vào Y và được viết $X \hookrightarrow Y$ nếu

(i) X là không gian vectơ con của Y và

(ii) toán tử tuyến tính đồng nhất I xác định trên X ánh xạ vào Y cho bởi $Ix = x$ với tất cả $x \in X$ là liên tục.

Ta nói X nhúng compact vào Y ($X \overset{com}{\hookrightarrow} Y$) nếu I là toán tử compact .

Từ Định nghĩa 1.4, bởi I là tuyến tính, (ii) tương đương tồn tại hằng số dương M sao cho $\|Ix\|_Y \leq M\|x\|_X,\ x \in X$.

Định nghĩa 1.5. Ta nói rằng miền mở $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ có *tính chất nón* nếu tồn tại một nón hữu hạn C sao cho với mỗi $x \in \Omega$ là đỉnh của một nón hữu hạn C_x chứa trong Ω và đồng dạng với C

Cho Ω là một miền có tính chất nón trong $\mathbb{R}^n$ và cho Ω^k là miền $k-$chiều thu được bởi giao của Ω với một phẳng $k-$chiều trong $\mathbb{R}^n$, $1 \leq k \leq n$. Rõ ràng $\Omega^n \equiv \Omega$. Cho j, m là các số nguyên không âm và cho p thỏa mãn $1 \leq p < \infty$.

Định lý 1.4 (Định lý nhúng Sobolev)**.** ***a)*** *Nếu $mp < n$ và $n - mp < k \leq n$ thì $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega^k)$ với $p \leq q \leq \dfrac{kp}{n-mp}$. Đặc biệt, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$ với $p \leq q \leq \dfrac{np}{n-mp}$, hoặc $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$ với $p \leq q \leq \dfrac{np}{n-mp}$.*

b) *Nếu $mp = n$ và $1 \leq k \leq n$ thì $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega^k)$ với $p \leq q < \infty$. Đặc biệt, $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ với $p \leq q < \infty$.*

c) *Tất cả các phép nhúng liên tục đã nêu trên đều đúng đối với các miền tùy ý nếu ta thay thế các không gian Sobolev $W^{j+m,p}(\Omega)$ bởi các không gian $\mathring{W}^{j+m,p}(\Omega)$.*

Với giả thiết như trên về miền Ω và với j, m là các số nguyên $j \geq 0, m \geq 1, 1 \leq p < \infty$, ta có định lý sau:

Định lý 1.5 (Định lý nhúng Rellich-Kondrachov). ***a)*** *Nếu $mp \leq n$ thì nhúng sau là compact: $W^{j+m,p}(\Omega) \overset{com}{\hookrightarrow} W^{j,q}(\Omega^k)$ nếu $0 < n - mp < k \leq n$ và $1 \leq q < \dfrac{kp}{n - mp}$. Đặc biệt $W^{j+m,p}(\Omega) \overset{com}{\hookrightarrow} W^{j,q}(\Omega^k)$ nếu $n = mp, 1 \leq k \leq n$ và $1 \leq q < \infty$.*

b) *Nếu $mp > n$ thì nhúng sau là compact: $W^{j+m,p}(\Omega) \overset{com}{\hookrightarrow} W^{j,q}(\Omega)$ nếu $1 \leq q \leq \infty$.*

c) *Tất cả các phép nhúng compact đã nêu trên đều đúng đối với các miền tùy ý nếu ta thay thế các không gian Sobolev $W^{j+m,p}(\Omega)$ bởi các không gian $\mathring{W}^{j+m,p}(\Omega)$.*

1.2. Một số bất đẳng thức

Trong mục này, chúng tôi nhắc lại một số bất đẳng thức thường sử dụng trong luận án cùng với các dạng phát biểu của bất đẳng thức Gronwall (xem [19]).

1.2.1. Bất đẳng thức Cauchy và bất đẳng thức Young

Với mọi $a, b > 0$ và $\epsilon > 0, 1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ta có

1. Bất đẳng thức Cauchy: $ab \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon}$.
2. Bất đẳng thức Young: $ab \leq \epsilon a^p + \dfrac{1}{(\epsilon p)^{\frac{q}{p}} q} b^p$.

1.2.2. Bất đẳng thức Hölder

Cho $1 \leq p_1, p_2, \cdots, p_m \leq \infty$ thỏa mãn $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \cdots + \dfrac{1}{p_m} = 1$ và giả thiết $u_k \in L_{p_k}(\Omega)$ với $k = 1, 2, \cdots, m$. Khi đó

$$\int_\Omega |u_1.u_2 \cdots u_m| dx \leq \prod_{k=1}^{m} \|u_i\|_{L_{p_k}(\Omega)}.$$

1.2.3. Một số phát biểu của bất đẳng thức Gronwall

Bổ đề 1.1 ([19], Dạng vi phân)**.** *Cho $\eta(\cdot)$ là hàm không âm, liên tục tuyệt đối trên $[0,T]$ và $\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$ với hầu khắp $t \in [0,T]$, ở đây $\phi(t)$ và $\psi(t)$ là các hàm không âm, khả tổng trên $[0,T]$. Khi đó*

$$\eta(t) \leq \Big(\eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds\Big) \exp\Big(\int_0^t \phi(s)ds\Big),$$

với tất cả $t \in [0,T]$. Đặc biệt, nếu $\psi(t) \equiv 0, t \in [0,T]$ và $\eta(0) = 0$ thì $\eta(t) \equiv 0$ trên $[0,T]$.

Bổ đề 1.2 ([19], Dạng tích phân)**.** *Cho $\xi(t)$ là hàm khả tổng, không âm trên $[0,T]$ và với hầu khắp t trên $[0,T]$, bất đẳng thức tích phân sau thỏa mãn*

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s)ds + C_2$$

với các hằng số $C_1, C_2 \geq 0$. Khi đó $\xi(t) \leq C_2\big(1 + C_1 t e^{C_1 t}\big)$ với hầu khắp $0 \leq t \leq T$. Trong trường hợp đặc biệt, nếu $C_2 = 0$ thì $\xi(t) \equiv 0$ trên $[0,T]$.

Tổng quát hơn, khi ta thay thế hằng số C_2 bởi một hàm thực khả tích, không âm. Khi đó bất đẳng thức Gronwall dưới dạng tích phân được phát biểu như sau:

Bổ đề 1.3. *Giả sử F, G là các hàm số thực không âm, khả tích trên $[t_0, T]$ và thỏa mãn $F(t) \leq G(t) + C\int_{t_0}^t F(s)ds,\ \forall\, t \in [t_0,T]$, ở đây C là hằng số dương đã cho. Khi đó*

$$F(t) \leq G(t) + C\int_{t_0}^t G(s)\exp\big(C(t-s)\big)ds,\ \forall\, t \in [t_0,T].$$

Hơn nữa, nếu $G(t)$ có đạo hàm $G'(t)$ và $G'(t)$ khả tích trên $[t_0,T]$ thì

$$F(t) \leq G(t_0)\exp\big(C(t-t_0)\big) + \int_{t_0}^t G'(s)\exp\big(C(t-s)\big)ds$$

Trong những trường hợp cụ thể chúng ta cần phải sử dụng dạng tổng quát để có thể áp dụng trong các trường hợp phức tạp (xem [55]).

Bổ đề 1.4. *Cho $z(t)$ là hàm khả vi xác định dương thỏa mãn bất đẳng thức $z(t) \leq C + \int\limits_a^t \big[f(s)z(s) + g(s)z^n(s)\big]ds,\ t \in I = [a,b]$, ở đây $C \geq 0$, các hàm $f(t), g(t)$ là những hàm liên tục trên I và $n > 1$ là hằng số. Khi đó với $t, s \in I$,*

$$1 - (n-1)C^{n-1} \int\limits_a^t g(s) \exp\Big((n-1)\int\limits_a^s f(\tau)d\tau\Big)ds > 0,$$

ta có

$$z(t) \leq \frac{C \exp\left(\int\limits_a^t f(s)ds\right)}{\left[1 - (n-1)C^{n-1}\int\limits_a^t g(s)\exp\left((n-1)\int\limits_0^s f(\tau)d\tau\right)\right]^{\frac{1}{n-1}}}.$$

1.2.4. Bất đẳng thức Gagliardo-Nirenberg

Trong công trình [16], Manuel Del Pino và Jean Dobeault đã xác định được hằng số tốt nhất đối với bất đẳng thức Gagliardo-Nirenberg. Trong một số trường hợp đánh giá, để thuận lợi khi thực hiện các phép nhúng trong các không gian Sobolev, ta có thể sử dụng bất đẳng thức Gagliardo-Nirenberg. Ta có các phát biểu của bất đẳng thức Gagliardo-Nirenberg như sau:

Định lý 1.6. *Cho số nguyên $d \geq 2$. Nếu số thực $p > 1$ và $p \leq \dfrac{d}{d-2}$ với $d \geq 3$, khi đó đối với bất kì hàm*

$$\omega \in \mathcal{D}^p(\mathbb{R}^d) = \{\omega \in L_{1+p}(\mathbb{R}^d) :\ \nabla\omega \in L_2(\mathbb{R}^d) \text{ và } |\omega|^{2p} \in L_1(\mathbb{R}^d)\},$$

bất đẳng thức sau thỏa mãn

$$\|\omega\|_{L_{2p}(\mathbb{R}^d)} \leq A\|\nabla\omega\|^{\theta}_{L_2(\mathbb{R}^d)}\|\omega\|^{1-\theta}_{L_{p+1}(\mathbb{R}^d)}, \tag{1.1}$$

ở đây

$$A = \left(\frac{y(p-1)^2}{2\pi d}\right)^{\frac{\theta}{2}} \left(\frac{2y-d}{2y}\right)^{\frac{1}{2p}} \left(\frac{\Gamma(y)}{\Gamma\big(y - \frac{d}{2}\big)}\right)^{\frac{\theta}{d}},$$

với $\theta = \dfrac{d(p-1)}{p[d+2-(d-2)p]}$, $\quad y = \dfrac{p+1}{p-1}$. *A là hằng số tốt nhất và dấu bằng trong (1.1) xảy ra nếu và chỉ nếu* ω *là một hằng số bội của một trong các hàm* $\omega_{\sigma,\overline{x}}(x) = \left(\dfrac{1}{\sigma^2 + |x-\overline{x}|^2}\right)^{\frac{1}{p-1}}$, *với* $\sigma > 0$ *và* $\overline{x} \in \mathbb{R}^d$.

Định lý 1.7. *Cho số nguyên* $d \geq 2$ *và giả thiết rằng* $0 < p < 1$. *Khi đó đối với bất kì hàm* $\omega \in \mathcal{D}^p(\mathbb{R}^d)$, *bất đẳng thức sau thỏa mãn*

$$\|\omega\|_{L_{p+1}(\mathbb{R}^d)} \leq A\|\nabla\omega\|^{\theta}_{L_2(\mathbb{R}^d)}\|\omega\|^{1-\theta}_{L_{2p}(\mathbb{R}^d)}, \tag{1.2}$$

ở đây

$$A = \left(\frac{y(p-1)^2}{2\pi d}\right)^{\frac{\theta}{2}} \left(\frac{2y}{2y+d}\right)^{\frac{1-\theta}{2p}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1+y\right)}{\Gamma(1+y)}\right)^{\frac{\theta}{d}},$$

với $\theta = \dfrac{d(1-p)}{(1+p)[d-(d-2)p]}$, $\quad y = \dfrac{p+1}{1-p}$. *A là hằng số tốt nhất và dấu bằng trong (1.2) xảy ra bởi các hàm có giá compact* $\omega_{\sigma,\overline{x}}(x) = \left(\sigma^2 - |x - \overline{x}|^2\right)_+^{\frac{1}{1-p}}$, *với* $\sigma > 0$ *và* $\overline{x} \in \mathbb{R}^d$.

1.3. Một số kiến thức căn bản về lí thuyết toán tử

Trong mục này, ta nhắc lại một số kiến thức căn bản của toán tử tuyến tính bị chặn (xem [65]). Cho X, Y là các không gian Banach tương ứng với chuẩn $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$.

Định nghĩa 1.6. Một toán tử tuyến tính từ X vào Y là một cặp $(A, \mathcal{D}(A))$ bao gồm một không gian con $\mathcal{D}(A) \subset X$, và một biến đổi tuyến tính $A: \ \mathcal{D}(A) \to Y$.

Ta nói rằng $\mathcal{D}(A)$ là miền xác định của toán tử tuyến tính A.

Định nghĩa 1.7. Một toán tử tuyến tính $(A, \mathcal{D}(A))$ từ X vào Y được gọi là bị chặn nếu tồn tại hằng số không âm C sao cho

$$\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \text{với } \forall x \in \mathcal{D}(A). \tag{1.3}$$

Nếu không tồn tại hằng số C nào để (1.3) thỏa mãn, ta nói $(A, \mathcal{D}(A))$ là toán tử tuyến tính không bị chặn.

Ví dụ 1.1. Giả sử $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là một miền bị chặn. Ta định nghĩa toán tử tích phân $K: \ L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ xác định bởi

$$Ku = \int\limits_{\Omega} k(x,y)u(y)dy. \tag{1.4}$$

ở đây $k: \ \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ được gọi là hạt nhân của toán tử K. Ta giả thiết rằng $k_1 := \sup\limits_{x\in\Omega} \int\limits_{\Omega} |k(x,y)|dy < \infty, \ k_2 := \sup\limits_{y\in\Omega} \int\limits_{\Omega} |k(x,y)|dx < \infty$. Khi đó K là toán tử tuyến tính bị chặn.

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\begin{aligned}
\|Ku\|^2_{L_2(\Omega)} &= \int\limits_{\Omega} \Big(\int\limits_{\Omega} k(x,y)u(y)dy \Big)^2 dx \\
&\le \int\limits_{\Omega} \Big(\int\limits_{\Omega} \sqrt{|k(x,y)|}\sqrt{|k(x,y)|}\, u(y)dy \Big)^2 dx \\
&\le \int\limits_{\Omega} \Big(\int\limits_{\Omega} |k(x,y))|dy \Big) \Big(\int\limits_{\Omega} |k(x,y)|\, |u(y)|^2 dy \Big) dx \\
&\le k_1 k_2 \|u\|^2_{L_2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Chuẩn của toán tử tuyến tính bị chặn $(A, \mathcal{D}(A))$, kí hiệu $\|A\|$, là số không âm nhỏ nhất C mà đối với nó (1.3) thỏa mãn. Ta có

$$\|A\| = \sup_{\substack{x\in\mathcal{D}(A)\\ \|x\|_X \neq 0}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\substack{x\in\mathcal{D}(A)\\ \|x\|_X = 1}} \|Ax\|_Y. \tag{1.5}$$

Ta ký hiệu $\mathcal{L}(X,Y)$ là tập hợp các toán tử tuyến tính bị chặn từ X vào Y. Trong trường hợp đặc biệt $X = Y$, ta ký hiệu $\mathcal{L}(X)$.

Định lý 1.8. *$\mathcal{L}(X,Y)$ cùng với chuẩn được xác định bởi hệ thức (1.5) là không gian Banach.*

Ta ký hiệu chuẩn trên không gian Banach $\mathcal{L}(X,Y)$ là $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$.

Định nghĩa 1.8. Giả sử $(\mathcal{D}(A), A)$ là toán tử tuyến tính từ X vào Y. Ta nói rằng toán tử A là compact nếu nó ánh xạ các tập bị chặn trong $\mathcal{D}(A)$ thành các tập compact tương đối trong Y. Tức là, nếu $\Omega \subset \mathcal{D}(A)$ là một tập bị chặn bất kỳ, ta có $\overline{A(\Omega)} \subset Y$ là compact.

Định nghĩa 1.9. Đồ thị của một toán tử tuyến tính $(A, \mathcal{D}(A))$ là tập hợp các cặp sắp thứ tự

$$\Gamma(A) = \{(x, Ax) : \ x \in \mathcal{D}(A)\} \subset X \times Y. \tag{1.6}$$

Định nghĩa 1.10. Ta nói rằng toán tử $(A, \mathcal{D}(A))$ là đóng nếu đồ thị $\Gamma(A)$ của nó là đóng trong $X \times Y$.

Bổ đề 1.5. *Toán tử $(A, \mathcal{D}(A))$ là đóng nếu và chỉ nếu nó có tính chất sau: Với bất kỳ dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(A)$ thỏa mãn $x_n \to x$ và $Ax_n \to y$ khi $n \to \infty$ thì $x \in \mathcal{D}(A)$ và $Ax = y$.*

Ví dụ 1.2. (a) Cho $X = L_p(\mathbb{R}^d), 1 \leq p \leq \infty$ và $m : \ \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ là hàm đo được. Ta định nghĩa toán tử A xác định bởi hệ thức $Af = mf$ với miền xác định $\mathcal{D}(A) = \{f \in X : \ mf \in X\}$. Khi đó A là toán tử tuyến tính đóng. Thực vậy, lấy dãy $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(A)$ và $f, g \in X$ sao cho $f_n \to f$ và $Af_n = mf_n \to g$ trong X khi $n \to \infty$. Suy ra tồn tại dãy cho $\{n_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ sao cho $f_{n_j}(x) \to f(x)$ và $m(x)f_{n_j}(x) \to g(x)$ với hầu khắp $x \in \mathbb{R}^d$ khi $j \to \infty$. Do đó $mf = g$ trong $L_p(\mathbb{R}^d)$ và ta thu được $f \in \mathcal{D}(A)$ và $Af = g$.
(b) Cho $X = L_1([0,1]), Y = \mathbb{C}$ và $Af = f(0)$ với $\mathcal{D}(A) = C([0,1])$. Khi đó A không là toán tử tuyến tính đóng. Thật vậy, ta xét dãy hàm $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}(A)$ xác định bởi

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 - nt, & 0 \leq t \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} < t \leq 1, \end{cases}$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$. Khi đó $\|f_n\|_{L_1([0,1])} = \frac{1}{2n} \to 0$ khi $n \to \infty$ nhưng $Af_n = f_n(0) = 1$.

Định nghĩa 1.11. Cho X là không gian Banach phức. Cho $(A, \mathcal{D}(A))$ là một toán tử từ X và X. Với bất kỳ $\lambda \in \mathbb{C}$, ta định nghĩa toán tử $(A_\lambda, \mathcal{D}(A))$ như sau

$$A_\lambda := A - \lambda I, \tag{1.7}$$

ở đây I là toán tử đồng nhất trên X. Nếu A_λ có ánh xạ ngược là $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ (tức là A_λ là tương ứng $1 - 1$ trên X), ta nói $R_\lambda(A)$ là giải thức của A. Cho $\big(\mathcal{D}(A), A\big)$ là toán tử tuyến tính từ X vào chính nó. Khi đó mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ được phân tích thành hai tập hợp sau:

(a) Tập giải thức của toán tử A là tập hợp

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ R_\lambda(A) \text{ tồn tại, bị chặn}\}.$$

Giả sử $\rho(A) \neq \emptyset$, thì mỗi phần tử $\lambda \in \rho(A)$ được gọi là giá trị chính quy của toán tử A.

(b) Phổ của toán tử A là $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Trong trường hợp đặc biệt, tập phổ điểm $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \sigma(A)\}$ ứng với $R_\lambda(A)$ không tồn tại, thì mỗi phần tử $\lambda \in \sigma_p(A)$ được gọi là giá trị riêng của A. Nếu $\lambda \in \sigma_p(A)$, các phần tử $x \in \mathcal{N}(A_\lambda) = \{y \in X : \ A_\lambda y = 0\}$ được gọi là các vectơ riêng của A.

Định lý 1.9 (Định lý Hilbert-Schmidt)**.** *Cho H là không gian Hilbert và cho $A \in \mathcal{L}(H)$ là toán tử compact, tự liên hợp. Khi đó tồn tại một dãy các giá trị riêng thực khác không $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$ với N là số chiều của A sao cho $|\lambda_i|$ là đơn điệu giảm và nếu $N = \infty$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Hơn nữa, nếu mỗi giá trị riêng của A bội được lặp lại trong dãy giá trị riêng thì tồn tại một cơ sở trực chuẩn $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ các hàm riêng tương ứng, tức là $A\phi_i = \lambda_i\phi_i$. Ngoài ra, $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ là cơ sở trực chuẩn của $\mathcal{R}(A)$ và A có thể biểu diễn bởi $Au = \sum\limits_{i=1}^N \lambda_i(\phi_i, u)\phi_i$.*

1.4. Một số bổ đề nhúng trong miền có cạnh, bài toán Dirichlet đối với phương trình elliptic cấp hai trong miền đa diện

1.4.1. Một số bổ đề nhúng trong miền có cạnh

Giả sử Ω là một miền có cạnh bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ $(n > 2)$ với biên $\partial\Omega$ bao gồm hai mặt Γ_1, Γ_2 giao nhau theo đa tạp l_0. Áp dụng chứng minh [60, Bổ đề 2.1.3, Bổ đề 2.1.1], ta có hai bổ đề sau:

Bổ đề 1.6. *Nếu $u \in H_a^k(\Omega)$ và $k \geq a + \dfrac{n}{2}$ thì $u \in L_\infty(\Omega)$ và*

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} \leq C\|u\|_{H_a^k(\Omega)}, \tag{1.8}$$

ở đây C là hằng số dương độc lập với u.

Chứng minh. Cho $B(x)$ là hình cầu có tâm x, bán kính $r = \dfrac{|x'|}{2}$, $|x'|^2 = x_1^2 + x_2^2$. Nếu $x \in \Omega, r = 1$, khi đó theo định lý nhúng Sobolev, ta có bất đẳng thức

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} \le C\|u\|_{H^k(\Omega\cap B(x))}. \tag{1.9}$$

Do đó $|u(x)| \le C\|u\|_{H^k(\Omega\cap B(x))}$, với mọi $u \in H_a^k(\Omega)$. Bây giờ, với $x \in \Omega$ và $r = r(x) = |x'|$. Thay thế $y = r^{-1}x$ và $v(x) = u(rx)$, ta thu được

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 = |v(y)|^2 &\le C\|v\|^2_{H^k(\Omega\cap B(y))} \\ &= C\sum_{|\alpha|\le k} r^{2|\alpha|-n}\|D^\alpha u\|^2_{L_2(\Omega\cap B(x))}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Từ $\dfrac{r}{2} < r(\xi) < \dfrac{3r}{2}$ với $\xi \in B(x)$, ta thu được $|u(x)|^2 \le Cr^{2(k-a)-n}\|u\|^2_{H_a^k(\Omega)}$. Do đó $u \in L_\infty(\Omega)$ và (1.8) được chứng minh. □

Bổ đề 1.7. *Cho* $1 < p \le q < \infty$, $l - \dfrac{n}{p} > k - \dfrac{n}{q}$ *và* $\delta - l + \dfrac{n}{p} = \gamma - k + \dfrac{n}{q}$. *Khi đó không gian* $V_\delta^{l,p}(\Omega)$ *được nhúng liên tục vào* $V_\gamma^{k,q}(\Omega)$.

Chứng minh. Với mỗi $x \in \Omega$, ta ký hiệu $|x'|^2 = x_1^2 + x_2^2$. Ta gọi Ω_j là tập hợp tất cả các phần tử $x \in \Omega$ sao cho $2^{-j} < |x'| < 2^{-j+1}$. Bởi $W^{l,p}(\Omega_0)$ nhúng liên tục vào $W^{k,q}(\Omega_0)$, nên đánh giá

$$\sum_{|\alpha|\le k}\int_{\Omega_0} |D_x^\alpha v(x)|^q dx \le C\Big(\sum_{|\alpha|\le l}\int_{\Omega_0} |D_x^\alpha v(x)|^p dx\Big)^{\frac{q}{p}} \tag{1.11}$$

thỏa mãn với tất cả $v \in W^{l,p}(\Omega_0)$. Nhân cả hai vế của bất đẳng thức (1.11) với $2^{-qj(\delta-l+\frac{3}{p})}$, sau đó thay thế $x = 2^j y$, ta thu được

$$\begin{aligned} &\sum_{|\alpha|\le k}\int_{\Omega_j} |y'|^{q(\gamma-k+|\alpha|)}|D_y^\alpha u(y)|^q dy \\ &\qquad \le C\Big(\sum_{|\alpha|\le l}\int_{\Omega_j} |y'|^{p(\delta-l+|\alpha|)}|D_y^\alpha u(y)|^p dy\Big)^{\frac{q}{p}}, \end{aligned} \tag{1.12}$$

ở đây $u(y) = v(2^j y)$, hằng số C độc lập với u và j.

Từ (1.12), ta lấy tổng tất cả theo j, ta thu được bất đẳng thức

$$\|u\|^q_{V^{k,q}_\gamma(\Omega)} \le C\|u\|^p_{V^{l,p}_\delta(\Omega)}. \tag{1.13}$$

Điều này đưa đến kết luận của Bổ đề. □

1.4.2. Bài toán Dirichlet đối với phương trình elliptic cấp hai trong miền đa diện

Tổng quát, Giả sử Ω là miền đa diện trong $\mathbb{R}^n, n > 2$. Trong công trình [48], V. A. Kondratiev đã xét bài toán Dirichlet đối với phương trình elliptic cấp hai

$$\begin{cases} L(x,D)u = f(x), \quad x \in \Omega, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{1.14}$$

trong miền Ω và có kết quả được phát biểu trong định lý dưới đây.

Định lý 1.10. *Giả sử $f \in H^k_\alpha(\Omega)$, $\alpha \in [0,1], \alpha = const, \frac{\pi}{\omega} > k+1-\alpha$. Khi đó nghiệm yếu $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ của bài toán (1.14) thuộc $H^{k+2}_\alpha(\Omega)$ và*

$$\|u\|_{H^{k+2}_\alpha(\Omega)} \le C\big(\|f\|_{H^k_\alpha(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}\big),$$

trong đó C là hằng số độc lập với f và u.

Định lý 1.10 là công cụ hữu ích giúp chúng tôi khẳng định được tính trơn của nghiệm theo biến thời gian của bài toán Dirichlet-Cauchy đối với phương trình hyperbolic cấp hai trong miền có cạnh.

1.5. Một số bổ đề nhúng và bài toán Dirichlet đối với phương trình elliptic mạnh trong miền nón có cạnh

1.5.1. Miền nón có cạnh

Trong $\mathbb{R}^3$, ta xét các nửa đường thẳng M_k, $k = 1, \cdots, d$ xuất phát từ gốc 0 và các mặt Γ_1 chứa $M_1, M_2, \cdots$, mặt Γ_{d-1} chứa M_{d-1}, M_d và mặt Γ_d chứa M_d, M_1 đều là nhẵn (lớp C^∞). Ta gọi S^2 là hình cầu đơn vị có tâm tại gốc 0 và Ω là miền kiểu đa giác nằm trên S^2, có cạnh $\gamma_k = \Gamma_k \cap S^2, k = 1, \cdots, d$. Ta xác định nón bị chặn $\mathcal{K}$ có các mặt Γ_k, Ω,

các cạnh M_k và đỉnh tại gốc 0 như sau:

$$\mathcal{K} = \Big\{x \in \mathbb{R}^3 : \ \frac{x}{|x|} \in \Omega\Big\}.$$

1.5.2. Một số bổ đề nhúng

Chúng ta có các nhúng liên tục trong các không gian Sobolev có trọng xác định trên nón $\mathcal{K}$, các nhúng này được phát biểu trong các Bổ đề 3.1.3, Bổ đề 3.1.4 và Bổ đề 3.1.6 trong [60].

Bổ đề 1.8. *Cho l, l' là các số nguyên không âm bất kỳ, $\beta, \beta' \in \mathbb{R}$, $\delta = (\delta_1, \cdots, \delta_d), \delta' = (\delta'_1, \cdots, \delta'_d)$ là hai bộ $d-$số thực thuộc $\mathbb{R}^d$ và $1 < p \le q < \infty$ thỏa mãn $l - \frac{3}{p} > l' - \frac{3}{q}$, $\beta - l + \frac{3}{p} = \beta' - l' + \frac{3}{q}$, $\delta_k - l + \frac{3}{p} \le \delta'_k - l' + \frac{3}{q}$ với $k = 1, \cdots, d$. Khi đó không gian $V^{l,p}_{\beta,\delta}(\mathcal{K})$ được nhúng liên tục vào không gian $V^{l',q}_{\beta',\delta'}(\mathcal{K})$.*

Bổ đề 1.9. *Cho $1 < p < \infty$, $l > \frac{3}{p}$ là số nguyên không âm, $\beta \in \mathbb{R}$, $\delta = (\delta_1, \cdots, \delta_k) \in \mathbb{R}^d$. Khi đó với mỗi $u \in V^{l,p}_{\beta,\delta}(\mathcal{K})$, ta có*

$$\Big\|\rho^{\beta - l + \frac{3}{p}} \prod_{k=1}^{d} \Big(\frac{r_k}{\rho}\Big)^{\delta_k - l + \frac{3}{p}} u\Big\|_{L_\infty(\mathcal{K})} \le C\|u\|_{V^{l,p}_{\beta,\delta}(\mathcal{K})}. \tag{1.15}$$

Ở đây C là hằng số độc lập với u.

Bổ đề 1.10. *Không gian $\mathring{W}^{l,p}(\mathcal{K})$ nhúng liên tục liên tục vào trong không gian $\mathring{V}^{l,p}_{0,0}(\mathcal{K})$.*

Từ Bổ đề 1.8 và Bổ đề 1.10, đối với mỗi $\beta, \delta_k \in [-m, m], k = 1, 2, \cdots, d$, ta có các nhúng $H^m(\mathcal{K}) \hookrightarrow V^m_{0,0}(\mathcal{K}) \hookrightarrow V^0_{\beta,\delta}(\mathcal{K})$; $V^m_{0,0}(\mathcal{K}) \hookrightarrow V^0_{-\beta,-\delta}(\mathcal{K})$; $V^0_{\beta,\delta}(\mathcal{K}) \hookrightarrow V^{-m}_{0,0}(\mathcal{K})$, ở đây $V^{-m}_{0,0}(\mathcal{K})$ là không gian đối ngẫu của $V^m_{0,0}(\mathcal{K})$.

1.5.3. Bài toán Dirichlet đối với hệ elliptic mạnh trong miền nón có cạnh

Trên nón bị chặn $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3$, ta xét bài toán sau:

$$\begin{cases} Lu = F & \text{trên } \mathcal{K}, \\ \dfrac{\partial^k u}{\partial \nu^k}\Big|_{\Gamma_j} = 0 & \text{với } j = 1, \cdots, d, \end{cases} \tag{1.16}$$

ở đây L là toán tử vi phân elliptic mạnh cấp $2m$ với hệ số biến thiên trong $\mathcal{K}$ và $k = 0, 1, \cdots, m-1$.

Ta giới thiệu ở đây các toán tử pencil được sinh bởi bài toán Dirichlet đối với phương trình elliptic trong nón đa diện $\mathcal{K}$, (xem [60, Chương 3]). Gọi $M_k, (k = 1, \cdots, d)$ là một cạnh nào đó của $\mathcal{K}$, gọi $\Gamma_{k_+}, \Gamma_{k_-}$ tương ứng là hai mặt có chung bờ là M_k. Ta ký hiệu $\mathcal{D}_k$ là nhị diện mà nó bị chặn bởi 2 nửa mặt phẳng $\Gamma^0_{k_+}$ và $\Gamma^0_{k_-}$ cùng tiếp xúc tương ứng với $\Gamma_{k_+}, \Gamma_{k_-}$ tại M_k. Kí hiệu θ_k là góc phẳng của nhị diện $\mathcal{D}_k$. Gọi r, φ là tọa độ cực trong mặt phẳng trực giao với M_k thỏa mãn

$$\Gamma^0_{k_\pm} = \Big\{x \in \mathbb{R}^3 : \ r > 0, \ \varphi = \pm\frac{\theta_k}{2}\Big\}.$$

Với $t \in [0, T]$ cố định, ta xác định toán tử $A_k(\lambda, t)$ cho bởi

$$A_k(\lambda, t)\mathbf{u} = r^{2-\lambda} L^0(0, t, D)(r^\lambda \mathbf{u}),$$

ở đây $L^0(0, t, D)u = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ij}(0, t)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}(0, t)\Big)$, $u(x) = r^\lambda \mathbf{u}(\varphi), \lambda \in \mathbb{R}$.

Toán tử $A_k(\lambda, t)$ xác định ánh xạ liên tục từ $W^2_2(I_k) \cap \mathring{W}^2_2(I_k)$ vào $L_2(I_k)$, với $\lambda \in \mathbb{R}$, ở đây I_k là khoảng $\Big(-\frac{\theta_k}{2}, \frac{\theta_k}{2}\Big)$. Một số thực λ_0 được gọi là giá trị riêng của $A_k(\lambda, t)$ nếu tồn tại phần tử khác không $\mathbf{u} \in W^2_2(I_k) \cap \mathring{W}^2_2(I_k)$ sao cho $A_k(\lambda_0, t)\mathbf{u} = 0$. Ký hiệu $\delta^{(k)}_+(t)$ và $\delta^{(k)}_-(t)$ là các số thực tốt nhất sao cho dải số thực $1 - \delta^{(k)}_-(t) < \lambda < 1 + \delta^{(k)}_+(t)$ không chứa giá trị riêng của $A_k(\lambda, t)$. Hơn nữa, ta định nghĩa $\delta^{(k)}_\pm = \inf\limits_{t\in[0,T]} \delta^{(k)}_\pm(t), \ k = 1, \cdots, d$.

Xét hệ tọa độ cầu xác định bởi các thành phần $\rho = |x|, \omega = \frac{x}{|x|}$ trong $\mathcal{K}$. Ta định nghĩa toán tử $\mathfrak{U}(\lambda, t)\mathbf{u} = \rho^{2-\lambda} L^0(0, t, D)(\rho^\lambda \mathbf{u})$, ở đây $u(x) = \rho^\lambda \mathbf{u}(\omega)$. Ta thấy rằng $\mathfrak{U}(\lambda, t)$ xác định một ánh xạ liên tục từ $W^2_2(I_k) \cap \mathring{W}^2_2(I_k)$ vào $L_2(I_k)$. Một giá riêng của $\mathfrak{U}(\lambda, t)$ là số thực λ_0 sao cho tồn tại phần tử khác không $\mathbf{u} \in W^2_2(I_k) \cap \mathring{W}^2_2(I_k)$ để $\mathfrak{U}(\lambda_0, t)\mathbf{u} = 0$.

Từ Hệ quả 4.1.10 và Định lý 4.1.11 trong [60], ta có bổ đề sau:

Bổ đề 1.11. *Cho $u \in V^l_{\beta,\delta}(\mathcal{K})$ là nghiệm của bài toán (1.16), ở đây*

$$F \in V^{l-2}_{\beta,\delta}(\mathcal{K}) \cap V^{l'-2}_{\beta',\delta'}(\mathcal{K}), \ l \geq 2, \ l' \geq 2.$$

Giả thiết rằng dải số thực đóng nằm giữa các đường thẳng $\lambda = l - \beta - \frac{3}{2}$ *và* $\lambda = l' - \beta' - \frac{3}{2}$ *không chứa các giá trị riêng của toán tử* $\mathfrak{U}(\lambda, t), t \in [0, T]$ *và các thành phần của* δ, δ' *thỏa mãn bất đẳng thức*

$$-\delta_+^{(k)} < \delta_k - l + 1 < \delta_-^{(k)}, \quad -\delta_+^{(k)} < \delta'_k - l' + 1 < \delta_-^{(k)}.$$

Khi đó $u \in V^{l'}_{\beta',\delta'}(\mathcal{K})$ *và* $\|u\|^2_{V^{l'}_{\beta',\delta'}(\mathcal{K})} \leq C\|F\|^2_{V^{l'-2}_{\beta',\delta'}(\mathcal{K})}$, *ở đây* C *là hằng số độc lập với* u *và* F.

1.6. Một số kiến thức căn bản về lí thuyết nửa nhóm các toán tử tuyến tính bị chặn

Trong mục này, ta nhắc lại một số kiến thức căn bản về định nghĩa nửa nhóm, các nửa nhóm đặc biệt và tính chất tương ứng (xem [56, 18]). Cho $(X, \|\cdot\|_X)$ là không gian Banach thực, $\mathcal{L}(X)$ là tập hợp các toán tử tuyến tính bị chặn từ X vào X với chuẩn $\|T\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup\limits_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_X$, $T \in \mathcal{L}(X)$.

Định nghĩa 1.12. Một họ $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ trong $\mathcal{L}(X)$ được gọi là nửa nhóm của các toán tử tuyến tính trên X nếu hai điều kiện sau thỏa mãn

(i) $S(0) = I$, I là toán tử đồng nhất trên X.

(ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$, $\forall\, t, s \geq 0$.

Để ngắn gọn, thay vì gọi $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ là nửa nhóm của các toán tử tuyến tính trên X, ta gọi $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ là nửa nhóm.

Định nghĩa 1.13. Giả sử $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ là một nửa nhóm. Toán tử $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$, xác định bởi $\mathcal{D}(A) = \left\{x \in X : \lim\limits_{t\downarrow 0} \dfrac{S(t)x - x}{t} \text{ tồn tại}\right\}$ và $Ax = \lim\limits_{t\downarrow 0} \dfrac{S(t)x - x}{t}$ được gọi là phần tử sinh của nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Định nghĩa 1.14. Nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ được gọi là C_0-nửa nhóm nếu với mọi $x \in X$, ta có $\lim\limits_{t\downarrow 0} S(t)x = x$.

Định lý 1.11. *Giả sử* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *là* C_0-*nửa nhóm, khi đó tồn tại* $M \geq 1$ *và* $\omega \in \mathbb{R}$ *sao cho* $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$, $\forall\, t \geq 0$.

Định nghĩa 1.15. Một C_0-nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ được gọi là co nếu với mọi $t \geq 0$, ta có $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$.

Định lý 1.12 (Định lý Hille-Yosida)**.** *Toán tử tuyến tính $A: \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ là toán tử sinh của C_0-nửa nhóm co $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ nếu và chỉ nếu hai điều kiện sau đều thỏa mãn*

(i) A xác định trù mật và đóng, tức là $\mathcal{D}(A)$ trù mật trong X và A là toán tử tuyến tính đóng.

(ii) $(0, +\infty) \subseteq \rho(A)$ và với mỗi $\lambda > 0, \|R_\lambda(A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \dfrac{1}{\lambda}$.

Định nghĩa 1.16. Nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ được gọi là nửa nhóm liên tục mạnh nếu với mỗi $x \in X$, ánh xạ $\xi_x: [0, \infty) \to X$, $\xi_x(t) = S(t)x$ liên tục.

Mệnh đề 1.2. *Giả sử $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ là nửa nhóm trên không gian Banach $(X, \|\cdot\|_X)$. Khi đó các điều kiện sau là tương đương*

(a) $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ là nửa nhóm liên tục mạnh.

(b) $\lim\limits_{t\downarrow 0} S(t)x = x$, với tất cả $x \in X$.

(c) Tồn tại các số $T > 0, M \geq 1$ và tập con trù mật $D \subset X$ thỏa mãn

(i) $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(x)} \leq M$, với $\forall t \in [0, T]$.

(ii) $\lim\limits_{t\downarrow 0} S(t)x = x$, với tất cả $x \in D$.

Từ Mệnh đề 1.2, nếu $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ là nửa nhóm liên tục mạnh thì nó là C_0-nửa nhóm.

Định nghĩa 1.17. Nửa nhóm liên tục mạnh $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ được gọi là liên tục chuẩn nếu ánh xạ từ $(0, +\infty) \to \mathcal{L}(X), t \mapsto S(t)$ là liên tục.

Định nghĩa 1.18. Nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ trên không gian Banach X được gọi là ổn định mũ nếu tồn tại các hằng số $\delta > 0, M \geq 1$ sao cho với mọi $t \geq 0$, $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{-\delta t}$.

Định nghĩa 1.19. Một C_0-nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ là compact nếu đối với mỗi $t > 0, S(t)$ là toán tử compact.

Định lý 1.13. *Cho $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ là nửa nhóm liên tục mạnh. Khi đó các tính chất sau là tương đương*

(i) $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *là compact.*

(ii) $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *là liên tục chuẩn và toán tử sinh của nó có giải thức compact.*

Giả sử X là không gian Banach, cho $A:\ \mathcal{D}(A)\subseteq X\to X$ là $\mathbb{C}-$toán tử tuyến tính sinh ra C_0-nửa nhóm co $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Với mỗi $0<\theta\leq\pi$, ta định nghĩa quạt (xem [56]) $\mathbb{C}_\theta=\{z\in\mathbb{C}:\ -\theta<\arg z<\theta\}$. Rõ ràng

$$\overline{\mathbb{C}}_\theta=\{z\in\mathbb{C}:\ -\theta\leq\arg z\leq\theta\}\cup\{0\}.$$

Hàm $f(z)$ được gọi là hàm giải tích trong miền $\mathcal{R}$ của mặt phẳng phức nếu $f(z)$ là hàm đơn trị và có đạo hàm tại mọi điểm thuộc $\mathcal{R}$.

Định nghĩa 1.20. Ta nói rằng C_0-nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ là giải tích, nếu tồn tại $0<\theta\leq\pi$ và ánh xạ $\widetilde{S}:\ \overline{\mathbb{C}}_\theta\to\mathcal{L}(X)$ sao cho

(i) $S(t)=\widetilde{S}(t)$ với mỗi $t\geq 0$;

(ii) $\widetilde{S}(z_1+z_2)=\widetilde{S}(z_1)\widetilde{S}(z_2)$ với mọi $z_1,z_2\in\overline{\mathbb{C}}_\theta$;

(iii) $\lim\limits_{z\in\overline{\mathbb{C}}_\theta,z\to 0}\widetilde{S}(z)x=x$ với mỗi $x\in X$;

(iv) ánh xạ $z\to\widetilde{S}(z)$ là giải tích từ $\mathbb{C}_\theta$ vào $\mathcal{L}(X)$.

Định nghĩa 1.21. Nửa nhóm liên tục mạnh $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ trên không gian Banach X được gọi là khả vi nếu với mọi $x\in X$, ánh xạ

$$\xi_x:\ (0,+\infty)\to X,\quad t\mapsto\ S(t)x$$

là khả vi tại mọi điểm $t\in(0,+\infty)$.

Định lý 1.14. *Cho $A:\ \mathcal{D}(A)\subseteq X\to X$ là một $\mathbb{C}-$toán tử tuyến tính sinh ra C_0-nửa nhóm co $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Nếu $0\in\rho(A)$ thì các mệnh đề sau là tương đương*

(i) Nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ là nửa nhóm giải tích và bị chặn đều.

(ii) *Tập hợp* $\{\lambda \in \mathbb{C} : \ Re\lambda > 0\} \subseteq \rho(A)$ *và tồn tại hằng số* $C > 0$ *sao cho với mỗi* $\lambda \in \mathbb{C}, Re\lambda > 0$ *và* $Im\lambda \neq 0$, *ta có* $\|R_\lambda(A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{|Im\lambda|}$.

(iii) *Tồn tại* $\delta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *và* $M > 0$ *sao cho* $\mathbb{C}_{\frac{\pi}{2}+\delta} \subseteq \rho(A)$ *và với mỗi* $\lambda \in \mathbb{C}_{\frac{\pi}{2}+\delta}$, *ta có* $\|R_\lambda(A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda|}$.

(iv) *Nửa nhóm* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *khả vi với mỗi* $t > 0$ *và tồn tại hằng số* $C > 0$ *sao cho* $\|S'(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{t}$ *với mỗi* $t > 0$.

Hệ quả 1.1. *Giả sử* H *là không gian Hilbert phức. Khi đó nếu* $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ *là toán tử tự liên hợp và sinh ra* C_0-*nửa nhóm co* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *thì* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *là nửa nhóm giải tích trên* H.

Nhận xét 1.1. [[18], trang 119] Giả sử $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ là nửa nhóm liên tục mạnh (tức là C_0 nửa nhóm) trên không gian Banach X. Khi đó

(i) Nếu $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ là giải tích thì nó là khả vi và do đó nó là liên tục chuẩn.

(ii) Nếu $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ là nửa nhóm compact thì nó là liên tục chuẩn.

Ta minh họa phần tử sinh, nửa nhóm giải tích, compact, khả vi, liên tục chuẩn trong ví dụ sau:

Ví dụ 1.3. Giả sử $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền bị chặn với biên $\partial\Omega$ đủ trơn. Cho $X = L_2(\Omega)$, ta xét toán tử $\mathcal{A} = -\Delta$ có miền xác định $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathring{H}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \subset L_2(\Omega)$. Khi đó $-\mathcal{A}$ sinh ra C_0-nửa nhóm giải tích, compact $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ trên X.

Chứng minh. a. Trước hết ta chứng minh $-\mathcal{A}$ sinh ra C_0-nửa nhóm co trên $X = L_2(\Omega)$. Từ kết quả $C_0^\infty(\Omega)$ trù mật trong $L_2(\Omega)$ và $C_0^\infty(\Omega)$ nhúng liên tục vào $D(-\mathcal{A})$, kéo theo $-\mathcal{A}$ xác định trù mật.

Với mỗi $\lambda > 0$, ta xét bài toán

$$\begin{cases} \lambda u(x) - \Delta u(x) = f(x), \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{1.17}$$

ở đây $u \in \mathcal{D}(-\mathcal{A})$ là hàm chưa biết, $f \in L_2(\Omega)$ đã cho. Hàm $u \in H^1(\Omega)$ được gọi là nghiệm yếu của (1.17) nếu và chỉ nếu $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ và

$$\int\limits_{\Omega} (\lambda uv + \nabla u \nabla v)dx = \int\limits_{\Omega} fvdx, \ \forall v \in \mathring{H}^1(\Omega). \tag{1.18}$$

Đặt $B[u,v] = \lambda \int\limits_{\Omega} uvdx + \int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$. Khi đó với mọi $u, v \in \mathring{H}^1(\Omega)$ thì

$$\big|B[u,v]\big| \leq |\lambda| \int\limits_{\Omega} |uv|dx + \int\limits_{\Omega} |\nabla u \nabla v|dx.$$

Áp dụng bất đẳng thức Hölder, ta có $\big|B[u,v]\big| \leq C\|u\|_{\mathring{H}^1(\Omega)}\|v\|_{\mathring{H}^1(\Omega)}$. Thêm nữa, với mọi $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ thì $B[u,u] =\geq C\|u\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)}$. Áp dụng định lý Lax-Milgram, phương trình (1.18) có duy nhất nghiệm $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$. Theo định lý về tính chính quy của nghiệm của bài toán thì $u \in H^2(\Omega)$. Do đó $u \in \mathcal{D}(-\mathcal{A}) = \mathring{H}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Điều này chứng tỏ rằng với mỗi $f \in L_2(\Omega)$ thì bài toán (1.17) có nghiệm duy nhất $u \in \mathcal{D}(-\mathcal{A})$.

Tiếp theo, nếu u là nghiệm của (1.17). Thay $v := u$ vào (1.18), ta được

$$\lambda \int\limits_{\Omega} |u|^2 dx + \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int\limits_{\Omega} fudx \leq \|f\|_{L_2(\Omega)}\|u\|_{L_2(\Omega)}.$$

Do đó với với mọi $\lambda > 0$ thì $\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_{L_2(\Omega)}$.

Theo chứng minh trên, với mỗi $f \in L_2(\Omega)$, tồn tại duy nhất $u \in \mathcal{D}(-\mathcal{A})$ thỏa mãn $(\lambda I - \Delta)u = f$ với mọi $\lambda > 0$ tương đương với $u = (\lambda I - \Delta)^{-1} f = R_\lambda(\Delta) f$. Điều này cho thấy $(0, +\infty) \subseteq \rho(-\mathcal{A})$, thêm nữa $\|R_\lambda(-\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \dfrac{1}{\lambda}$ với mọi $\lambda > 0$. Do đó $R_\lambda(-\mathcal{A})$ là toán tử liên tục và kéo theo $R_\lambda(-\mathcal{A}) \in \mathcal{L}(L_2(\Omega))$. Vậy $R_\lambda(-\mathcal{A})$ là toán tử tuyến tính đóng. Điều này đưa đến $-\mathcal{A}$ là toán tử tuyến tính đóng. Áp dụng Định lý Hille-Yosida, ta thu được $-\mathcal{A}$ sinh ra C_0-nửa nhóm co trên $X = L_2(\Omega)$.

b. Tiếp theo, với mọi $u, v \in \mathcal{D}(\Delta)$, ta có

$$(\Delta u, v) = \int\limits_{\Omega} \Delta uvdx = -\int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int\limits_{\Omega} u\Delta vdx = (u, \Delta v)$$

Do đó Δ là toán tử tự liên hợp trên $X = L_2(\Omega)$. Áp dụng Hệ quả 1.1, ta thu được $-\mathcal{A} = \Delta$ sinh ra C_0-nửa nhóm giải tích trên $X = L_2(\Omega)$.

c. Theo chứng minh trên thì $-\mathcal{A} = \Delta$ sinh ra C_0-nửa nhóm giải tích $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ trên $X = L_2(\Omega)$. Áp dụng Định lý 7.2.5 trong [56], ta thu được toán tử Δ sinh ra C_0-nửa nhóm compact trong $L_2(\Omega)$. Bởi Nhận xét 1.1 thì $-\mathcal{A} = \Delta$ sinh ra C_0-nửa nhóm liên tục chuẩn trên $X = L_2(\Omega)$. $\square$

1.7. Một số kiến thức căn bản về độ đo không compact và ánh xạ nén

Giả sử E là một không gian Banach. Ta ký hiệu $\mathcal{P}_b(E)$ là tập hợp các tập con bị chặn khác rỗng của E.

Định nghĩa 1.22 ([45])**.** Một hàm $\Phi : \mathcal{P}_b(E) \to [0, +\infty)$ được gọi là độ đo không compact (MNC) trong E nếu $\Phi(\overline{co}\Omega) = \Phi(\Omega),\ \forall\, \Omega \in \mathcal{P}_b(E)$, ở đây $\overline{co}\Omega$ là bao đóng của bao lồi của Ω. MNC Φ trong E được gọi là

(i) đơn điệu nếu với $\forall\, \Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{P}_b(E),\ \Omega_1 \subset \Omega_2$ thì $\Phi(\Omega_1) \leq \Phi(\Omega_2)$;

(ii) không kỳ dị nếu $\Phi(\{a\} \cup \Omega) = \Phi(\Omega)$ với $\forall\, a \in E$ và với $\forall\, \Omega \in \mathcal{P}_b(E)$;

(iii) bất biến đối với hợp của tập compact $K \subset E$ và $\Omega \in \mathcal{P}_b(E)$, tức là $\Phi(K \cup \Omega) = \Phi(\Omega)$;

(iv) nửa tuyến tính đại số nếu $\Phi(\Omega_1 + \Omega_2) \leq \Phi(\Omega_1) + \Phi(\Omega_2)$ với bất kỳ $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{P}_b(E)$;

(v) chính quy nếu $\Phi(\Omega) = 0$ tương đương tính compact tương đối của Ω.

MNC Hausdorff $\chi(\cdot)$ là độ đo MNC quan trọng, nó được xác định bởi

$$\chi(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0 :\ \Omega \text{ có một } \varepsilon - \text{lưới hữu hạn}\} \tag{1.19}$$

với $\Omega \in \mathcal{P}_b(E)$.

Dựa vào MNC Hausdorff χ trên E, ta thể định nghĩa MNC theo dãy $\widetilde{\chi}^\circ$ xác định bởi $\widetilde{\chi}^\circ = \sup\{\chi(D) :\ D \in \Delta(\Omega)\}$, ở đây $\Delta(\Omega)$ là tập hợp của tất cả các tập con của Ω mà có thể đếm được nhiều nhất (xem [4, Mục 1.4.3]). Với tất cả các tập bị chặn $\Omega \subset E$, ta có $\frac{1}{2}\chi(\Omega) \leq \widetilde{\chi}^\circ(\Omega) \leq \chi(\Omega)$ (xem [4, Mục 1.4.5]). Khi đó mệnh đề sau là hiển nhiên.

Mệnh đề 1.3. *Cho χ là MNC Hausdorff trên không gian Banach E. Với tập con $\Omega \in \mathcal{P}_b(E)$ nào đó, khi đó với bất kỳ $\varepsilon > 0$ luôn tồn tại dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega$ sao cho $\chi(\Omega) \leq 2\chi(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) + \varepsilon$.*

Cho $C\big([0,T];X\big)$ là không gian Banach gồm tất cả các hàm liên tục xác định trên đoạn $[0,T]$ có giá trị trên X, với chuẩn $\|u\|_C = \sup\limits_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X$, $u \in C(0,T;X)$. Ta biết rằng, khi $X = \mathbb{R}^n$, độ đo MNC Hausdorff trên $C\big([0,T];\mathbb{R}^n\big)$ được cho bởi (xem [4, Ví dụ 2.11])

$$\chi_T(D) = \frac{1}{2} \lim_{\delta\to 0} \sup_{u\in D} \max_{t,s\in[0,T],|t-s|<\delta} \|u(t) - u(s)\|_{\mathbb{R}^n}, \tag{1.20}$$

với $D \subset C\big([0,T];\mathbb{R}^n\big)$. Độ đo (1.20) có thể được xem như là modulus của các tập con đồng liên tục trong $C\big([\sigma,T];\mathbb{R}^n\big)$. Nhưng nếu không gian $C\big([\sigma,T];X\big)$, với X là không gian vô hạn chiều, thì độ đo không MNC Hausdorff không có dạng (1.20). Tuy nhiên, nếu $D \subset C\big([0,T];X\big)$ là tập con đồng liên tục thì $\chi_T(D) = \sup\limits_{t\in[0,T]} \chi\big(D(t)\big)$. ở đây χ là độ đo MNC Hausdorff trong X.

Xét không gian $BC(\mathbb{R}^+;X)$ gồm tất cả các hàm liên tục bị chặn trên $[0,\infty)$ và có giá trị trên X. Kí hiệu π_T là toán tử hạn chế trên không gian này, tức là $\pi_T(u)$ là giá trị mà $u \in BC([0,T];X)$. Khi đó

$$\chi_\infty(D) = \sup_{T>0} \chi_T\big(\pi_T(D)\big), \quad D \subset B(\mathbb{R}^+;X),$$

là một MNC. Các độ đo sau đây (xem [8, 5]) cũng là MNC

$$d_T(D) = \sup_{u\in D} \sup_{t\geq T} \|u(t)\|_X, \quad d_\infty(D) = \lim_{T\to\infty} d_T(D),$$
$$\chi^*(D) = \chi_\infty(D) + d_\infty(D). \tag{1.21}$$

Chúng ta có đánh giá sau, có thể xem chứng minh trong [45].

Mệnh đề 1.4. *Cho χ là MNC Hausdorff trên không gian Banach X. Nếu dãy $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L_1(0,T;X)$ thỏa mãn $\|u_n(t)\|_{L_2(0,T;X)} \leq v(t)$ với mọi n và hầu khắp $t \in [0,T]$, ở đây $v \in L_1(0,T)$ là hàm không âm. Khi đó*

$$\chi\Big(\Big\{\int_0^t u_n(s)dx\Big\}\Big) \leq 2\int_0^t \chi\big(\{u_n(t)\}\big)ds \tag{1.22}$$

với $t \in [0, T]$.

Giả sử χ là MNC Hausdorff trên X. Với mỗi $T \in \mathcal{L}(X)$, ta định nghĩa $\chi-$chuẩn của T (xem [4]) như sau:

$$\|T\|_\chi = \inf\{k > 0 : \chi(T(\Omega)) \leq k\,\chi(\Omega),\ \Omega \in B_X\}.$$

Ta có đánh giá (xem trong [6]) $\|T\|_\chi \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X)}$.

Ta nhắc lại nguyên lý điểm bất động đối với ánh xạ nén, nó sẽ được sử dụng trong chương cuối.

Định nghĩa 1.23 ([4])**.** Cho μ là MNC trên không gian Banach E và $\emptyset \neq D \subset E$. Ánh xạ liên tục $F:\ D \to E$ được gọi là ánh xạ nén ứng với μ, nếu với $\forall\,\Omega \in \mathcal{P}_b(D)$ sao cho $\mu(\Omega) \leq \mu\big(F(\Omega)\big)$, kéo theo Ω là compact tương đối. Ta nói F là $\mu-$ánh xạ nén.

Định lý 1.15 ([45], Hệ quả 3.3.1)**.** *Cho D là một tập con lồi đóng bị chặn của không gian Banach E và cho $F:\ D \to D$ là một $\mu-$ánh xạ nén, ở đây μ là MNC đơn điệu, không suy biến trên E. Khi đó*

$$Fix(F) = \{x \in D :\ x = F(x)\}$$

là tập compact khác rỗng.

Định lý 1.16 ([14])**.** *Cho Ω là một tập con khác rỗng, bị chặn, đóng và lồi của không gian Banach E và cho $F:\ \Omega \to \Omega$ là ánh xạ liên tục sao cho tồn tại hằng số $k \in [0, 1)$ bất đẳng thức sau thỏa mãn $\mu(F(D)) \leq k\mu(D)$ với bất kì $\emptyset \neq D \subset \Omega$ thì F có điểm bất động trong tập Ω.*

Ví dụ 1.4 ([4], Mục 1.1)**.** Trong không gian $C[a, b]$ bao gồm các hàm giá trị thực liên tục trên đoạn $[a, b] \subset \mathbb{R}$, giá trị của hàm tập χ trên một tập bị chặn Ω được xác định bởi

$$\chi(\Omega) = \frac{1}{2} \lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in \Omega} \max_{0 \leq \tau \leq \delta} \|x - x_\tau\|, \tag{1.23}$$

ở đây $\|\cdot\|$ là chuẩn trên $C[a, b]$, x_τ ký hiệu là $\tau-$phân bổ của hàm x, xác định như sau:

$$x_\tau(t) = \begin{cases} x(t + \tau), & \text{nếu } a \leq t \leq b - \tau, \\ x(b), & \text{nếu } b - \tau \leq t \leq b. \end{cases}$$

Chứng minh. Ta chọn một số $\epsilon > 0$ tùy ý và xây dựng $[\chi(\Omega) + \epsilon]-$lưới hữu hạn Q của tập bị chặn Ω trong $C[a, b]$. Cho $x \in \Omega$, lấy $y \in Q$ sao cho $\|x - y\| \leq \chi(\Omega) + \epsilon$. Lấy $\delta > 0$ và $\tau \in [0, \delta]$, khi đó

$$\begin{aligned}\|x - x_\tau\| &\leq \|x - y\| + \|y - y_\tau\| + \|y_\tau - x_\tau\| \\ &\leq \|2\|x - y\| + \|y - y_\tau\| \\ &\leq 2\chi(\Omega) + 2\epsilon + \max_{y \in Q} \max_{0 \leq \tau \leq \delta} \|y - y_\tau\|.\end{aligned}$$

Vì vậy $\sup\limits_{x \in \Omega} \max\limits_{0 \leq \tau \delta} \|x - x_\tau\| \leq 2\chi(\Omega) + 2\epsilon + \max\limits_{y \in Q} \max\limits_{0 \leq \tau \leq \delta} \|y - y_\tau\|$. Cho $\delta \to 0$ và sử dụng tính đồng liên tục của họ hữu hạn các phần tử trong Q, ta thu được $\lim\limits_{\delta \to 0} \sup\limits_{x \in \Omega} \max\limits_{0 \leq \tau \delta} \|x - x_\tau\| \leq 2\chi(\Omega) + 2\epsilon$. Bởi ϵ là tùy ý, nên ta có

$$\frac{1}{2} \lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in \Omega} \max_{0 \leq \tau \delta} \|x - x_\tau\| \leq \chi(\Omega). \tag{1.24}$$

Bây giờ ta giả thiết rằng các hàm $x \in \Omega$ được mở rộng từ đoạn $[a, b]$ tới toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$ như sau:

$$\begin{cases} x(t) = x(a) & \text{nếu } t \leq a, \\ x(t) = x(b) & \text{nếu } t \geq b. \end{cases}$$

Ta định nghĩa toán tử R_h và P_h với $h > 0$, xác định bởi

$$\begin{aligned}(R_h x)(t) = \frac{1}{2}\Big(&\max\{x(s) : \\ &x \in [t - h, t + h]\} + \min\{x(s) : \ s \in [t - h, t + h]\}\Big),\end{aligned} \tag{1.25}$$

$$(P_h x)(t) = \frac{1}{2h} \int\limits_{t-h}^{t+h} x(s) ds. \tag{1.26}$$

Không quá khó để thấy rằng tập $P_h R_h(\Omega)$ là compact tương đối trong $C[a, b]$. Khi đó ta có thể kết luận được rằng nó thiết lập một $\frac{q_{2h}}{2}-$lưới của tập Ω, ở đây $q_{2h} = \sup\limits_{x \in \Omega} \max\limits_{0 \leq \tau \leq \delta} \|x - x_\tau\|$. Ta thấy rằng

$$\|P_h R_h x - x\| = \max_{a \leq t \leq b} \Big| \frac{1}{2h} \int\limits_{t-h}^{t+h} (R_h x)(s) ds - \frac{1}{2h} \int\limits_{t-h}^{t+h} x(s) ds \Big|$$

$$\leq \frac{1}{2h} \max_{a \leq t \leq b} \int_{t-h}^{t+h} |(R_h x)(x) - x(s)| ds. \tag{1.27}$$

Nếu $|t - s| \leq h$, thì hiển nhiên ta có

$$\min\{x(\tau) : \ \tau \in [s-h, s+h]\} \leq x(t) \leq \max\{x(\tau) : \ \tau \in [s-h, s+h]\}.$$

Từ đó $|(R_h x)(s) - x(s)| \leq \frac{1}{2h} \max\limits_{0 \leq \tau \leq 2h} \|x - x_\tau\|$, suy ra $|(R_h x)(s) - x(s)| \leq \frac{q_{2h}}{2}$. Từ kết quả này và từ (1.27), ta suy ra rằng $\chi(\Omega) \leq \frac{q_{2h}}{2}$. Cho $h \to 0$, ta thu được

$$\chi(\Omega) \leq \frac{1}{2} \lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in \Omega} \max_{0 \leq \tau \leq \delta} \|x - x_\tau\|. \tag{1.28}$$

Từ (1.24) và (1.28) ta thu được điều phải chứng minh. □

Ví dụ 1.5 ([2])**.** Cho toán tử $F : \ L_p(\mathbb{R}^N) \to L_p(\mathbb{R}^N), 1 \leq p < \infty$ xác định bởi

$$F(u)(x) = f\big(x, u(x)\big) + \int_{\mathbb{R}^N} k(x,y)(Qu)(y)dy,$$

ở đó f, k và Q thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) $f : \ \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ thỏa mãn điều kiện Carathéodory, tức là $f(\cdot, t)$ là hàm đo được với bất kì $t \in \mathbb{R}$ và hàm $f(x, \cdot)$ liên tục với hầu khắp $x \in \mathbb{R}^N$, tồn tại hằng số $\lambda \in [0, 1)$ và $u \in L_p(\mathbb{R}^N)$ sao cho

$$\big|f(x,t) - f(y,s)\big| \leq |u(x) - u(y)| + \lambda |t - s|,$$

với bất kỳ $t, s \in \mathbb{R}$ và với hầu hết $x, y \in \mathbb{R}^N$.

(ii) $f(\cdot, 0) \in L_p(\mathbb{R}^N)$.

(iii) $k : \ \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện Carathéodory và tồn tại $g_1, g_2 \in L_p(\mathbb{R}^N), g \in L_q(\mathbb{R}^N)$ $\big(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\big)$ sao cho $|k(x,y)| \leq g(y) g_1(x)$ với tất cả $x, y \in \mathbb{R}^N$ và

$$\big|k(x_1, y) - k(x_2, y)\big| \leq g(y) \big|g_2(x_1) - g_2(x_2)\big|, \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N.$$

(iv) Toán tử $Q : \ L_p(\mathbb{R}^N) \to L_p(\mathbb{R}^N)$ và tồn tại hàm $\psi : \ \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}^N_+$ không giảm sao cho $\|Q(u)\|_{L_p(\mathbb{R}^N)} \leq \psi\big(\|u\|_{L_p(\mathbb{R}^N)}\big)$ với $\forall\, u \in L_p(\mathbb{R}^N)$.

(v) Tồn tại số thực dương r_0 thỏa mãn bất đẳng thức

$$\lambda r + \psi(r)\|K\|_1 + \big\|f(\cdot,0)\big\|_{L_p(\mathbb{R}^N)} \leq r$$

ở đây

$$K(u)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} k(x,y)u(y)dy$$

và $\|K\|_1 = \sup\{\|Ku\|_{L_p(\mathbb{R}^N)} : \ \|u\|_{L_p(\mathbb{R}^N)} \leq 1\}$.

Bây giờ ta xác định độ đo ω_0 (xem [2, Định lý 2.2]).

Cho $1 \leq p < \infty$ và $\Omega \subset L_p(\mathbb{R}^N)$ bị chặn. Khi đó với mọi $x \in \Omega$ và $\epsilon > 0$, ta đặt

$$\begin{aligned}
\omega^T(x,\epsilon) &= \sup\{\|\tau_h x - x\|_{L_p(B_T)} : \ \|h\|_{\mathbb{R}^N} < \epsilon\},\\
\omega^T(\Omega,\epsilon) &= \sup\{\omega^T(x,\epsilon) : \ x \in \Omega\},\\
\omega^T(\Omega) &= \lim_{\epsilon\to 0}\omega^T(\Omega,\epsilon),\ \omega(\Omega) = \lim_{T\to\infty}\omega^T(\Omega),\\
d(\Omega) &= \lim_{T\to\infty}\sup\{\|x\|_{L_p(\mathbb{R}^N\setminus B_T)} : \ x \in \Omega\},
\end{aligned}$$

ở đây $\tau_h f(x) = f(x+h), f \in \Omega$ với tất cả $x, h \in \mathbb{R}^N; B_T = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\|_{\mathbb{R}^N} \leq T\}$. Khi đó $\omega_0 : \ \mathcal{P}_b(L_p(\mathbb{R}^N)) \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\omega_0(\Omega) = \omega(\Omega) + d(\Omega)$$

là một độ đo MNC trên $L_p(\mathbb{R}^N)$. Hơn nữa, ω_0 là chính quy (xem [2, Định lý 2.3]). Ứng với độ đo ω_0 thì F có điểm bất động trong $L_p(\mathbb{R}^N)$ (xem [2, Định lý 3.2]).

Chương 2

BÀI TOÁN BIÊN BAN ĐẦU ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH HYPERBOLIC NỬA TUYẾN TÍNH TRONG TRỤ KHÔNG TRƠN

Trong chương này, chúng tôi sử dụng phương pháp xấp xỉ Galerkin và các định lí nhúng trong các không gian Sobolev để khẳng định sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu toàn cục của bài toán giá trị biên ban đầu thứ nhất đối với phương trình hyperbolic nửa tuyến tính bậc cao trong các trụ không trơn tổng quát. Kết quả đạt được thể hiện qua việc giải quyết được mức độ phức tạp của lớp các hàm phi tuyến đóng vai trò thành phần nhiễu được xét trong phương trình của bài toán.

2.1. Thiết lập bài toán

Giả sử $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ là miền bị chặn có biên $\partial\Omega$ không trơn, ta kí hiệu hình trụ hữu hạn $Q_T = \Omega \times (0,T)$ có $S_T = \partial\Omega \times (0,T),\ 0 < T < +\infty$ và hình trụ vô hạn $Q = \Omega \times (0,\infty)$ có $S = \partial\Omega \times (0,+\infty)$. Trên Q, chúng ta xét toán tử vi phân L có dạng

$$Lu = \sum_{0\leq|\alpha|,|\beta|\leq m} D^\alpha\big(a_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u\big),\ (x,t) \in Q, \tag{2.1}$$

ở đó $a_{\alpha\beta} \in C^1(\overline{Q}),\ |\alpha|,|\beta| = 0,1,\cdots,m$ và

$$a_{\alpha\beta}(x,t) = (-1)^{|\alpha|+|\beta|}a_{\beta\alpha}(x,t),\ |\alpha|,|\beta| = 0,1,\cdots,m,\ (x,t) \in \overline{Q}.$$

Ta luôn giả thiết rằng tồn tại hằng số dương θ sao cho

$$B[u,u;t] = (-1)^m \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m} (-1)^{|\alpha|}a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u D^\beta u \geq \theta\|u\|^2_{\mathring{H}^m(\Omega)} \tag{2.2}$$

thỏa mãn với mọi $u \in \mathring{H}^m(\Omega)$ và với $\forall t \in [0,+\infty)$.

Chúng ta xét bài toán sau:

$$u_{tt} + (-1)^m Lu + F(x,t,u,Du,\cdots,D^{2m-2}u) = h,\ (x,t) \in Q, \tag{2.3}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\Big|_S = 0, \qquad j = 0,1,\cdots,m-1, \tag{2.5}$$

ở đó $\dfrac{\partial^j}{\partial \nu^j}$ ký hiệu đạo hàm riêng cấp j theo vectơ đơn vị hướng ra ngoài S. Hàm $h : Q \to \mathbb{R}$ là hàm đã cho, hàm phi tuyến tổng quát F có dạng

$$F = \sum_{0 \le |\alpha| \le m-1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha F_\alpha(x,t,u,Du,\cdots,D^{m-1}u),\ (x,t) \in Q$$

trong đó tồn tại hàm $A = A(x,t,v_\alpha,|\alpha| \le m-1)$ sao cho $F_\alpha = \dfrac{\partial A}{\partial v_\alpha}$ liên tục trên Q và thỏa mãn các điều kiện sau:

$$|F_\alpha(x,t,v_0,v_1,\cdots,v_{m-1})| \le C\Big(1 + \sum_{|\alpha| \le m-1} |v_\alpha|^{p+1}\Big), \tag{2.6}$$

với tất cả $t \in [0,+\infty),\ x \in \Omega$;

$$|F_\alpha(x,t,v_0,v_1,\cdots,v_{m-1}) - F_\alpha(x,t,w_0,w_1,\cdots,w_{m-1})| \le C \sum_{|\alpha| \le m-1} \big(1 + |v_\alpha|^p + |w_\alpha|^p\big)|v_\alpha - w_\alpha|; \tag{2.7}$$

$$\Big|\frac{\partial A}{\partial t}\Big| \le C\Big(1 + \sum_{|\alpha| \le m-1} |v_\alpha|^p\Big); \tag{2.8}$$

$$A(x,0,0,\cdots,0) = 0, \quad \int_\Omega A(x,t,u,Du,\cdots,D^{m-1}u)dx \ge 0 \tag{2.9}$$

với hầu khắp $t \in [0,+\infty)$. Ở đây $\frac{2}{n} \le p \le \frac{2}{n-2}$ khi $n > 2$ và $1 \le p < +\infty$ khi $n = 2$.

Để minh họa sự tồn tại của hàm F thỏa mãn các điều kiện nêu trên, ta xét hàm F có dạng

$$F(x,t,u,Du,D^2u) = u|u|^p - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^p\right),$$

với $\frac{2}{n} \leq p \leq \frac{2}{n-2}, n > 2$. Ta thấy rằng $F_0 = u|u|^p, F_{1i} = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}\Big|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^p$ $(i = 1, \cdots, n)$ và

$$A(x,t,u,Du) = \frac{1}{p+2}|u|^{p+2} + \frac{1}{p+2}\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^{p+2}.$$

Ta thu được $F_0 = \dfrac{\partial A}{\partial v_0}, F_1 = \dfrac{\partial A}{\partial v_1}$. Hơn nữa

$$|F_0(x,t,u,Du)| \leq |u|^{p+1}, \quad |F_{1i}(x,t,u,Du)| \ \leq C|Du|^{p+1}, i = 1, \cdots, n.$$

Như vậy F_0, F_1 thỏa mãn điều kiện (2.6). Việc khẳng định các thành phần F_0, F_1 của F thỏa mãn (2.7) được dựa vào bổ đề sau

Bổ đề 2.1. *Cho v, w là các số thực. Khi đó với bất kì $\alpha > 0$, ta có*

$$\big||v|^\alpha v - |w|^\alpha w\big| \leq (\alpha+1)\max\big\{|v|,|w|\big\}^\alpha |v-w|,$$

với mọi $(v,w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Vận dụng Bổ đề 2.1, ta có

$$\begin{aligned}|F_0(x,t,u,Du,D^2u) - F_0(x,t,v,Dv,D^2v)| &= \big|u|u|^p - v|v|^p\big| \\ &\leq C\big(|u|^p + |v|^p\big)|u-v|.\end{aligned}$$

Chứng minh tương tự đối với F_1. Dễ dàng thấy rằng $A(x,t,u,Du)$ thỏa mãn các điều kiện (2.8) và (2.9).

Ta định nghĩa không gian Sobolev $H_*^{m,1}(Q)$ bao gồm tất cả các hàm u xác định trên Q thỏa mãn $u \in L_\infty\big(0,\infty; \mathring{H}^m(\Omega)\big), u_t \in L_\infty\big(0,\infty; L_2(\Omega)\big)$, $u_{tt} \in L_\infty\big(0,\infty; H^{-m}(\Omega)\big)$ với chuẩn

$$\|u\|_{H_*^{m,1}(Q)} = \|u\|_{L_\infty\left(0,\infty;\mathring{H}^m(\Omega)\right)} + \|u_t\|_{L_\infty\left(0,\infty;L_2(\Omega)\right)} + \|u_{tt}\|_{L_\infty\left(0,\infty;H^{-m}(\Omega)\right)}.$$

Tương tự, thay vì xét $t \in [0,\infty)$ ta xét $t \in [0,T]$ $(0 < T < \infty)$, ta có không gian Sobolev $H_*^{m,1}(Q_T)$ với chuẩn $\|u\|_{H_*^{m,1}(Q_T)}$.

Bởi ký hiệu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ta xác định cặp phần tử tương ứng thuộc $\mathring{H}^m(\Omega)$ và $H^{-m}(\Omega)$, ký hiệu bởi $(\cdot,\cdot)$ là tích trong trong $L_2(\Omega)$.

Định nghĩa 2.1. Với mỗi $h \in L_2\big(0,\infty; L_2(\Omega)\big)$, hàm $u \in H_*^{m,1}(Q)$ được gọi là nghiệm yếu toàn cục của bài toán (2.3)-(2.5) nếu $u(x,0) =$

$0, u_t(x,0) = 0,\ x \in \Omega$ và đẳng thức

$$\langle u_{tt}(t), v\rangle + B[u(t), v; t] + \sum_{0\le|\alpha|\le m-1} \big(F(\cdot, t, u, Du, \cdots, D^{m-1}u), D^\alpha v\big) = \big(h(\cdot, t), v\big) \quad (2.10)$$

thỏa mãn với tất cả $v \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$ và hầu khắp $t \in [0, +\infty)$.

Thay vì $t \in [0, \infty)$ ta xét $t \in [0, T]$ $(0 < T < \infty)$, ta nói $u \in H_*^{m,1}(Q_T)$ là nghiệm yếu địa phương của bài toán (2.3)-(2.5).

2.2. Sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm yếu địa phương

Trong mục này, chúng tôi chứng minh sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm yếu địa phương của bài toán (2.3)-(2.5). Để khẳng định điều này, ta lấy $\{\omega_i(x)\}_{i=1}^\infty \subset \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega) \cap L_2(\Omega)$ là cơ sở trực giao của $\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$, đồng thời là cơ sở trực chuẩn của $L_2(\Omega)$. Ta cố định $N \in \mathbb{N}^*$ và tìm hàm

$$u^N(t) = \sum_{i=1}^N g_i(t)\omega_i,\ t \in [0, T], \quad (2.11)$$

ở đây ta có ý muốn lựa chọn các hệ số hàm $g_i(t),\ 0 \le t \le T < +\infty,\ i = 1, 2, \cdots, N$ thỏa mãn

$$g_i(0) = 0, \quad (i = 1, 2, \cdots, N), \quad (2.12)$$

$$g_i'(0) = 0, \quad (i = 1, 2, \cdots, N) \quad (2.13)$$

và

$$\big(u_{tt}^N(t), \omega_i\big) + B[u^N(t), \omega_i; t] + \sum_{|\alpha|\le m-1} \big(F_\alpha(\cdot, t, u_N, Du^N, \cdots, D^{m-1}u^N), D^\alpha\omega_i\big) = \big(h(\cdot, t), \omega_i\big) \quad (2.14)$$

với $i = 1, 2, \cdots, N$ và $t \in [0, T]$. Với mỗi $k = 1, 2, \cdots, N$, ta có

$$(u_{tt}^N(t), \omega_k) = g"_k(t), \quad B[u^N(t), \omega_k; t] = \sum_{l=1}^N B_{lk}(t)g_l(t), \quad (2.15)$$

trong đó $B_{lk}(t) = B[\omega_l, \omega_k; t]$. Đặt

$$f_k(t) = \sum_{|\alpha|\le m-1} \big(F_\alpha(\cdot, t, u^N, Du^N, \cdots, D^{m-1}u^N), D^\alpha\omega_k\big), \quad (2.16)$$

$$h_k(t) = \big(h(\cdot, t), \omega\big). \quad (2.17)$$

Từ (2.14)−(2.17), với $k = 1, 2, \cdots, N$ và với $t \in [0, \infty)$, ta có hệ phương trình vi phân thường

$$g"_k(t) + \sum_{l=1}^{N} B_{lk}(t) g_l(t) + f_k(t) = h_k(t). \tag{2.18}$$

Áp dụng các kết quả đạt được về sự tồn tại nghiệm của phương trình vi phân thường [12], luôn tồn tại các hàm g_k $(k = 1, 2, \cdots, N)$ thỏa mãn (2.12)−(2.14), là nghiệm của (2.18) với $0 \le t \le T < +\infty$. Như vậy ta đã chứng minh được rằng với mỗi số tự nhiên $N \in \mathbb{N}^*$, tồn tại $u^N(t)$ có dạng (2.11) và (2.12)−(2.14) thỏa mãn.

Tiếp theo, ta chứng minh bất đẳng thức năng lượng đối với $u^N(t)$ có dạng (2.11).

Định lý 2.1. *Cho $h \in L_2\big(0, T; L_2(\Omega)\big)$. Khi đó với mỗi hàm $u^N(t)$ có dạng (2.11), tồn tại hằng số dương C chỉ phụ thuộc Ω, T và các hệ số của toán tử L sao cho*

$$\begin{aligned} \operatorname*{ess\,sup}_{0 \le t \le T} \ & \big(\|u_{tt}^N(t)\|_{H^{-m}(\Omega)} + \|u_t^N(t)\|_{L_2(\Omega)} + \|u^N(t)\|_{\mathring{H}^m(\Omega)}\big) \\ & \le C\Big(1 + \|h\|^2_{L_2\big(0,T;L_2(\Omega)\big)}\Big). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Chứng minh. 1. Từ (2.14), ta nhân cả hai vế với $g_i'(t)$ và lấy tổng theo $i = 1, 2, \cdots, N$, khi đó

$$\begin{aligned} & \big(u_{tt}^N(t), u_t^N(t)\big) + B[u^N(t), u_t^N(t); t] \\ & \quad + \sum_{|\alpha| \le m-1} \big(F_\alpha(\cdot, t, u^N, Du^N, \cdots, D^{m-1}u^N), D^\alpha u_t^N\big) = \big(h(\cdot, t), u_t^N\big). \end{aligned}$$

Chú ý rằng $\big(u_{tt}^N(t), u_t^N(t)\big) = \dfrac{d}{dt}\Big(\dfrac{1}{2}\|u_t^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\Big)$ và bởi giả thiết

$$A = A(x, t, v_0, v_\alpha, |\alpha| \le m-1), \quad F_\alpha = \frac{\partial A}{\partial v_\alpha},$$

ta có

$$\Big(\sum_{|\alpha|\le m-1} F_\alpha(x,t,u^N,Du^N,\cdots,D^{m-1}u^N), D^\alpha u_t^N\Big)$$
$$= \frac{d}{dt}\int_\Omega A(x,t,u^N,Du^N,\cdots,D^{m-1}u^N)dx - \int_\Omega \frac{\partial A}{\partial t}dx.$$

Từ các đẳng thức thu được ở trên, ta có

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|u_t^N\|^2_{L_2(\Omega)} + \int_\Omega A(x,t,u^N,Du^N,\cdots,D^{m-1}u^N)\,dx\Big) + B[u^N,u_t^N;t]$$
$$= \int_\Omega \frac{\partial A}{\partial t}(x,t,u^N,Du^N,\cdots,D^{m-1}u^N)\,dx + \big(h(x,t),u_t^N\big). \quad (2.20)$$

Vì $a_{\alpha\beta}(x,t) = (-1)^{|\alpha|+|\beta|}a_{\beta\alpha}(x,t),\ |\alpha|,|\beta| = 0,1,\cdots,m,\ (x,t)\in\overline{Q}$ nên ta có

$$\frac{d}{dt}B[u^N,u^N;t] = 2B[u^N,u_t^N;t]$$
$$+\int_\Omega \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m}(-1)^{m+|\alpha|}a_{\alpha\beta t}(\cdot,t)D^\alpha u^N D^\beta u^N dx.$$

Do đó

$$B[u^N(t),u_t^N(t);t] = \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}B[u^N(t),u^N(t);t]\Big)$$
$$-\frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m}(-1)^{m+|\alpha|}a_{\alpha\beta t}(\cdot,t)D^\alpha u^N D^\beta u^N dx.$$

Từ giả thiết $a_{\alpha\beta}\in C^1(\overline{Q})$, áp dụng bất đẳng thức Hölder, ta thu được

$$B[u^N(t),u_t^N(t);t] \ge \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}B[u^N(t),u^N(t);t]\Big) - C\|u^N(t)\|^2_{\mathring{H}^m(\Omega)}. \quad (2.21)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy đối với hạng tử cuối bên vế phải của (2.20), ta có

$$\big|\big(h(x,t),u_t^N(t)\big)\big| \le \frac{1}{2}\Big(\|h(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u_t^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\Big). \quad (2.22)$$

Sử dụng (2.8), tiếp tục đánh giá hạng tử đầu tiên bên vế phải của (2.20), ta được

$$\Big|\int\limits_{\Omega}\frac{\partial A}{\partial t}(x,t,u^N,Du^N,\cdots,D^{m-1}u^N)dx\Big| \leq C\Big(1+\sum_{|\alpha|\leq m-1}\int\limits_{\Omega}|D^\alpha u^N|^p dx\Big).$$

Nhận thấy rằng với mọi đa chỉ số α với $|\alpha|\leq m-1$, áp dụng bất đẳng thức Hölder và từ $\frac{2}{n}\leq p\leq\frac{2}{n-2}$, ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega}|D^\alpha u^N(t)|^p dx &\leq C\|D^\alpha u^N(t)\|^p_{L_{np}(\Omega)} \leq C\|D^\alpha u^N(t)\|^p_{\mathring{H}^1(\Omega)}\\ &\leq C\|u^N(t)\|^p_{\mathring{H}^m(\Omega)}.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\Big|\int\limits_{\Omega}\frac{\partial A}{\partial t}(x,t,u^N,Du^N,\cdots,D^{m-1}u^N)dx\Big| \leq C\big(1+\|u^N(t)\|^p_{\mathring{H}^m(\Omega)}\big).$$

Ta nhận thấy với $\frac{2}{n}\leq p\leq\frac{2}{n-2}, n>2$ và với $C>0$ nào đó thì $x^p\leq x^2+C$ đúng với $x\geq 1$ và $x=0$. Còn nếu $0<x<1$ thì $0<x^p<1$ và $0<x^2<1$ nên luôn tồn tại hằng số $C>0$ để $x^p\leq x^2+C$. Bởi lập luận này, ta có

$$\|u^N(t)\|^p_{\mathring{H}^m(\Omega)} \leq \|u^N(t)\|^2_{\mathring{H}^m(\Omega)}+C.$$

Vì vậy

$$\Big|\int\limits_{\Omega}\frac{\partial A}{\partial t}(x,t,u^N,Du^N,\cdots,D^{m-1}u^N)dx\Big| \leq C(1+\|u^N(t)\|^2_{\mathring{H}^m(\Omega)}). \quad (2.23)$$

Kết hợp (2.20)−(2.23), ta thu được

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big(\|u_t^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)}+B[u^N,u^N;t]+\int\limits_{\Omega}A(x,t,u^N,Du^N,\cdots,D^{m-1}u^N)\,dx\Big)\\ &\qquad\leq C\Big[1+\|h(t)\|^2_{L_2(\Omega)}+\|u_t^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)}+\|u^N(t)\|^2_{\mathring{H}^m(\Omega)}\Big]. \quad (2.24)\end{aligned}$$

Lấy tích phân từ 0 đến t cả hai vế của (2.24), ta được

$$\|u^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + B[u^N(t), u^N(t); t] + 2\int\limits_{\Omega} A(x, t, u^N, Du^N, \cdots, D^{m-1}u^N)dx$$
$$\leq C\int\limits_0^t \big(1 + \|h(s)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u_t^N(s)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u^N(s)\|^2_{\mathring{H}^m(\Omega)}\big)ds$$
$$\leq C(T)\Big(1 + \|h\|^2_{L_2\big(0,T;L_2(\Omega)\big)}$$
$$+ \int\limits_0^t \big(\|u_t^N(s)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u^N(s)\|^2_{\mathring{H}^m(\Omega)}\big)ds\Big).$$

Sử dụng giả thiết (2.9), ta có từ đánh giá trên rằng

$$\|u_t^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + B[u^N, u^N; t] \leq C(T)\Big(1 + \|h\|^2_{L_2\big(0,T;L_2(\Omega)\big)}$$
$$+ \int\limits_0^t \big(\|u_t^N(s)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u^N(s)\|^2_{\mathring{H}^m(\Omega)}\big)ds\Big).$$

Từ giả thiết (2.2), bất đẳng thức trên đưa đến

$$\|u_t^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u^N(t)\|^2_{\mathring{H}^m(\Omega)}$$
$$\leq C(T)\Big[1 + \|h\|^2_{L_2(0,T,L_2(\Omega))} + \int_0^t \|u_t^N(s)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u^N(s)\|^2_{\mathring{H}^m(\Omega)}d\tau\Big]. \tag{2.25}$$

Đặt $\xi(s) = \|u_t^N(s)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u^N(s)\|^2_{\mathring{H}^m(\Omega)}$, bất đẳng thức (2.25) chuyển thành

$$\xi(t) \leq C(T)\Big(1 + \|h\|^2_{L_2\big(0,T;L_2(\Omega)\big)} + \int\limits_0^t \xi(s)ds\Big)$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall dạng tích phân, ta có

$$\xi(t) \leq C(T)\Big(1 + \|h\|^2_{L_2\big(0,T;L_2(\Omega)\big)}\Big)\Big(1 + C(T)e^{C(T).T}\Big)$$
$$\leq C(T)\big(1 + \|h\|^2_{L_2\big(0,T;L_2(\Omega)\big)}\big).$$

Từ cách đặt của $\xi(s)$, ta thu được

$$\|u_t^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u^N(t)\|^2_{\mathring{H}^m(\Omega)} \le C\Big(1 + \|h\|^2_{L_2\big(0,T;L_2(\Omega)\big)}\Big). \tag{2.26}$$

Do đó,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T} \big(\|u_t^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u^N(t)\|^2_{\mathring{H}^m(\Omega)}\big) \le C\Big(1 + \|h\|^2_{L_2\big(0,T;L_2(\Omega)\big)}\Big). \tag{2.27}$$

2. Tiếp theo, với mỗi $v \in \mathring{H}^m(\Omega)$ thỏa mãn $\|v\|_{\mathring{H}^m(\Omega)} \le 1$, khi đó với bất kỳ $N \in \mathbb{N}^*$, tồn tại $v_1 \in Span\{\omega_k\}_{k=1}^N$ và $v_2 \in \big(Span\{\omega_k\}_{k=1}^N\big)^\perp$ sao cho $v = v_1 + v_2$. Hiển nhiên ta có $\|v_1\|_{\mathring{H}^m(\Omega)} \le 1$ và $(v_2, \omega_k) = 0$ với $\forall k = 1, 2, \cdots, N$. Từ (2.14), ta có

$$\langle u_{tt}^N, v\rangle = \langle u_{tt}^N, v_1\rangle = -\sum_{|\alpha|\le m-1} \big(F_\alpha(\cdot, t, u^N, Du^N, \cdots, D^{m-1}u^N), D^\alpha v_1\big) + \big(h(\cdot, t), v_1\big) - B[u^N, v_1; t]. \tag{2.28}$$

Trong đẳng thức (2.28), áp dụng bất đẳng thức Cauchy và sử dụng (2.6), ta có đánh giá sau:

$$\begin{aligned}
&\sum_{|\alpha|\le m-1} \big|\big(F_\alpha(\cdot, t, u^N, Du^N, \cdots, D^{m-1}u^N), D^\alpha v_1\big)\big| \\
&\le \sum_{|\alpha|\le m-1} \int_\Omega |F_\alpha(\cdot, t, u^N, Du^N, \cdots, D^{m-1}u^N)|\, |D^\alpha v_1| dx \\
&\le C \sum_{|\alpha|\le m-1} \Big(\int_\Omega \big|F_\alpha(\cdot, t, u^N, Du^N, \cdots, D^{m-1}u^N)\big|^2 dx + \int_\Omega |D^\alpha v_1|^2 dx\Big) \\
&\le C \sum_{|\alpha|\le m-1} \Big[\int_\Omega \Big(1 + \sum_{|\beta|\le m-1} |D^\beta u^N|^{p+1}\Big)^2 dx + \|v_1\|^2_{\mathring{H}^m(\Omega)}\Big] \\
&\le C \sum_{|\alpha|\le m-1} \Big(1 + \sum_{|\beta|\le m-1} \int_\Omega |D^\beta u^N|^{2p+2} dx\Big) \\
&\le C \sum_{|\alpha|\le m-1} \Big(1 + \|u^N(t)\|^{2p+2}_{\mathring{W}^{m-1,2p+2}(\Omega)}\Big).
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Bởi $\frac{2}{n} \le p \le \frac{2}{n-2}$, áp dụng Định lý 1.4, $\mathring{H}^m(\Omega) = \mathring{W}^{m-1+2,2}(\Omega) \hookrightarrow \mathring{W}^{m-1,2p+2}(\Omega)$, kéo theo $\|u^N(t)\|_{\mathring{W}^{m-1,2p+2}(\Omega)} \le C\|u^N(t)\|_{\mathring{H}^m(\Omega)}$. Tức là

$$\|u^N(t)\|^{2p+2}_{\mathring{W}^{m-1,2p+2}(\Omega)} \le C\|u^N(t)\|^{2p+2}_{\mathring{H}^m(\Omega)}.$$

Áp dụng (2.26) và do $h \in L_2\big(0,T;L_2(\Omega)\big)$, ta thu được

$$\begin{aligned}\|u^N(t)\|^{2p+2}_{\mathring{H}^m(\Omega)} &= \|u^N(t)\|^{2p+1}_{\mathring{H}^m(\Omega)}\|u^N(t)\|_{\mathring{H}^m(\Omega)}\\ &\le C\Big(1+\|h\|^2_{L_2\big(0,T;L_2(\Omega)\big)}\Big)^{2p+1}\|u^N(t)\|_{\mathring{H}^m(\Omega)}\\ &\le C\|u^N(t)\|_{\mathring{H}^m(\Omega)}.\end{aligned}$$

Ta có từ (2.29) rằng

$$\sum_{|\alpha|\le m-1}\big|\big(F_\alpha(\cdot,t,u^N,Du^N,\cdots,D^{m-1}u^N),D^\alpha v_1\big)\big| \le C\Big(1+\|u^N\|_{\mathring{H}^m(\Omega)}\Big),$$

Thêm nữa, sử dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\big|\big(h(x,t),v_1\big)\big| \le C\|h(t)\|_{L_2(\Omega)},\ \big|B[u^N,v_1;t]\big| \le C\|u^N(t)\|_{\mathring{H}^m(\Omega)}.$$

Từ các đánh giá trên, ta thu được từ (2.28) đánh giá

$$\big|\langle u^N_{tt},v\rangle\big| \le C\Big(1+\|h\|_{L_2(\Omega)}+\|u^N\|_{\mathring{H}^m(\Omega)}\Big).$$

Do đó

$$\|u^N(t)\|_{H^{-m}(\Omega)} \le C\big(1+\|h\|_{L_2\big(0,T;L_2(\Omega)\big)}+\|u^N(t)\|_{\mathring{H}^m(\Omega)}\big).$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki và sử dụng (2.26), ta thu được

$$\|u^N_{tt}(t)\|^2_{H^{-m}(\Omega)} \le C\Big(1+\|h\|^2_{L_2\big(0,T;L_2(\Omega)\big)}\Big). \tag{2.30}$$

Điều này đưa đến

$$ess\sup_{0\le t\le T}\|u^N_{tt}(t)\|^2_{H^{-m}(\Omega)} \le C\Big(1+\|h\|^2_{L_2\big(0,T;L_2(\Omega)\big)}\Big). \tag{2.31}$$

Từ (2.27) và (2.31), ta thu được (2.19). □

Trên cơ sở áp dụng tính chất của hội tụ yếu và các định lý nhúng trong các không gian Sobolev, ta khẳng định sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm yếu địa phương của bài toán (2.3)−(2.5).

Định lý 2.2. *Với mỗi $h \in L_2\big(0,T;L_2(\Omega)\big)$, bài toán (2.3)−(2.5) có nghiệm yếu địa phương $u \in H^{m,1}_*(Q_T)$ và*

$$\|u\|^2_{H^{m,1}_*(Q_T)} \le C\Big(1+\|h\|^2_{L_2\big(0,T;L_2(\Omega)\big)}\Big), \tag{2.32}$$

ở C là hằng số dương độc lập với u và h.

Chứng minh. 1. Từ (2.19), các dãy $\{u^N\}_{N=1}^{\infty}, \{u_t^N\}_{N=1}^{\infty}$, $\{u_{tt}^N\}_{N=1}^{\infty}$ tương ứng bị chặn đều trong các không gian Banach tách được $L_\infty\big(0,T;\mathring{H}^m(\Omega)\big)$, $L_\infty\big(0,T;L_2(\Omega)\big), L_\infty\big(0,T;H^{-m}(\Omega)\big)$. Nói riêng đối với $\{u^N\}_{N=1}^{\infty}$ thì tồn tại dãy con, không mất tính tổng quát, ta vẫn kí hiệu bởi $\{u^N\}_{N=1}^{\infty}$ và u trong $L_\infty\big(0,T;\mathring{H}^m(\Omega)\big)$ sao cho $u^N \overset{\star}{\rightharpoonup} u$ trong $L_\infty\big(0,T;\mathring{H}^m(\Omega)\big)$. Khi đó

$$\begin{cases} u_t^N \overset{\star}{\rightharpoonup} u_t & \text{trong } L_\infty\big(0,T;L_2(\Omega)\big), \\ u_{tt}^N \overset{\star}{\rightharpoonup} u_{tt} & \text{trong } L_\infty\big(0,T;H^{-m}(\Omega)\big). \end{cases} \tag{2.33}$$

Thêm nữa, từ (2.26) và (2.30) với hầu khắp $t \in [0,T]$, ta có

$$\begin{cases} u^N(t) \rightharpoonup u(t) & \text{trong } \mathring{H}^m(\Omega), \\ u_t^N(t) \rightharpoonup u_t(t) & \text{trong } L_2(\Omega), \\ u_{tt}^N(t) \rightharpoonup u_{tt}(t) & \text{trong } H^{-m}(\Omega), \end{cases} \tag{2.34}$$

2. Với u được chỉ rõ ở trên, ta chứng minh u thỏa mãn đẳng thức

$$\begin{aligned} &\langle u_{tt}, v\rangle + B[u,v;t] \\ &\qquad + \sum_{|\alpha|\le m-1} \Big(F_\alpha(\cdot,t,u,Du,\cdots,D^{m-1}u), D^\alpha v\Big) = \big(h(\cdot,t),v\big) \end{aligned}$$

với tất cả $v \in \mathring{H}^m(\Omega)$ và với mọi $t \in [0,T]$. Thật vậy, với $l \in \mathbb{N}^*$ tùy ý đã được cố định l, hàm $v \in \mathring{H}^m(\Omega)$ được lựa chọn có dạng $v(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{l} \omega_k(x)$. Ta chọn số nguyên $N \ge l$ và lấy tổng theo $k = 1,2,\cdots,N$ trong (2.14), ta thu được

$$\begin{aligned} &\big(u_{tt}^N, v\big) + B[u^N, v; t] - \big(h(\cdot,t),v\big) \\ &\qquad = -\sum_{|\alpha|\le m-1} \Big(F_\alpha(\cdot,t,u^N,Du^N,\cdots,D^{m-1}u^N), D^\alpha v\Big). \end{aligned} \tag{2.35}$$

Đặt $F(u^N)(v) := \big(u_{tt}^N, v\big) + B[u^N, v; t] - \big(h(\cdot,t),v\big)$. Bởi $u^N(t) \rightharpoonup u(t)$ trong $\mathring{H}^m(\Omega)$, và $u_{tt}^N(t) \rightharpoonup u_{tt}(t)$ trong $H^{-m}(\Omega)$ nên $B[u^N(t), v; t] \to B[u(t), v; t]$ và $\big(u_{tt}^N(t), v\big) \to \big(u_{tt}(t), v\big)$. Vì vậy ta thu được

$$F(u^N)(v) \longrightarrow F(u)(v) \quad \text{khi } N \longrightarrow \infty. \tag{2.36}$$

Bây giờ ta khẳng định

$$\big(F_\alpha(\cdot, t, u^N, Du^N, \cdots, D^{m-1}u^N), D^\alpha v\big) \\ \to \big(F_\alpha(\cdot, t, u, Du, \cdots, D^{m-1}u).D^\alpha v\big),$$

Muốn vậy, ta xét

$$\big(F_\alpha(\cdot, t, u^N, Du^N, \cdots, D^{m-1}u^N), D^\alpha v\big) - \big(F_\alpha(\cdot, t, u, Du, \cdots, D^{m-1}u), D^\alpha v\big).$$

Áp dụng (2.7), ta có

$$\begin{aligned}
&\big|\big(F_\alpha(\cdot, t, u^N, Du^N, \cdots, D^{m-1}u^N), D^\alpha v\big) \\
&\qquad\qquad - \big(F_\alpha(\cdot, t, u, Du, \cdots, D^{m-1}u), D^\alpha v\big)\big| \\
&\le \Big(C \sum_{|\alpha|\le m-1} \big(1 + |D^\alpha u^N|^p + |D^\alpha u|^p\big)|D^\alpha u^N - D^\alpha u|, D^\alpha v\Big) \\
&= C \sum_{|\alpha|\le m-1} \int_\Omega \big(1 + |D^\alpha u^n|^p + |D^\alpha u|^p\big)|D^\alpha u^N - D^\alpha u||D^\alpha v|dx \\
&\qquad = C \sum_{|\alpha|\le m-1} \int_\Omega |D^\alpha u^N - D^\alpha u||D^\alpha v|dx \\
&\qquad\qquad + C \sum_{|\alpha|\le m-1} \int_\Omega |D^\alpha u^N|^p|D^\alpha u^N - D^\alpha u||D^\alpha v|dx \\
&\qquad\qquad\qquad + C \sum_{|\alpha|\le m-1} \int_\Omega |D^\alpha u|^p|D^\alpha u^N - D^\alpha u||D^\alpha v|dx \\
&\qquad =: J_1 + J_2 + J_3.
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Hölder và Định lý 1.5, ta có

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |D^\alpha u^N - D^\alpha u||D^\alpha v|dx &\le \big\|D^\alpha\big(u^N(t) - u(t)\big)\big\|_{L_2(\Omega)}\|D^\alpha v\|_{L_2(\Omega)} \\
&\le C\|u^N(t) - u(t)\|_{\mathring{H}^{m-1}(\Omega)}\|v\|_{\mathring{H}^m(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Vì vậy $J_1 \le C\|u^N(t) - u(t)\|_{\mathring{H}^{m-1}(\Omega)}\|v\|_{\mathring{H}^m(\Omega)}$.

Tiếp tục, với đa chỉ số α ($|\alpha| \le m-1$), áp dụng bất đẳng thức Hölder

với $p_1 = n, p_2 = 2, p_3 = \frac{2n}{n-2}$, ta có

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega} |D^\alpha u^N|^p |D^\alpha u^N - D^\alpha u||D^\alpha v| dx \\
&\leq \Big[\Big(\int\limits_{\Omega} \big(|D^\alpha u^N|^p\big)^{np} dx\Big)^{\frac{1}{np}}\Big]^p \Big(\int\limits_{\Omega} |D^\alpha u^N - D^\alpha u|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int\limits_{\Omega} |D^\alpha v|^{\frac{2n}{n-2}} dx\Big)^{\frac{n-2}{2n}} \\
&= \|D^\alpha u^N(t)\|^p_{L_{np}(\Omega)} \big\|D^\alpha\big(u^N(t) - u(t)\big)\big\|_{L_2(\Omega)} \|D^\alpha v\|_{L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Bởi $\frac{2}{n} \leq p \leq \frac{2}{n-2}$, ta có

$$\begin{aligned}
&\|D^\alpha u^N(t)\|^p_{L_{np}(\Omega)} \leq C\|D^\alpha u^N(t)\|^p_{\mathring{H}^1(\Omega)} \leq C\|u^N(t)\|^p_{\mathring{H}^m(\Omega)}, \\
&\big\|D^\alpha\big(u^N(t) - u(t)\big)\big\|_{L_2(\Omega)} \leq C\|u^N(t) - u(t)\|_{\mathring{H}^{m-1}(\Omega)}, \\
&\|D^\alpha v\|_{L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \leq C\|D^\alpha v\|_{\mathring{H}^1(\Omega)} \leq C\|v\|_{\mathring{H}^m(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Vì vậy $J_2 \leq C\|u^N(t)\|^p_{\mathring{H}^m(\Omega)} \|u^N(t) - u(t)\|_{\mathring{H}^{m-1}(\Omega)} \|v\|_{\mathring{H}^m(\Omega)}$. Lập luận tương tự như J_2, ta thu được

$$J_3 \leq C\|u(t)\|^p_{\mathring{H}^m(\Omega)} \|u^N(t) - u(t)\|_{\mathring{H}^{m-1}(\Omega)} \|v\|_{\mathring{H}^m(\Omega)}.$$

Từ các đánh giá đối với J_1, J_2, J_3, ta có

$$\begin{aligned}
&\big|\big(F_\alpha(\cdot, t, u^N, Du^N, \cdots, D^{m-1}u^N), D^\alpha v\big) \\
&\qquad\qquad - \big(F_\alpha(\cdot, t, u, Du, \cdots, D^{m-1}u), D^\alpha v\big)\big| \\
&\leq C\big(1 + \|u^N(t)\|^p_{\mathring{H}^m(\Omega)} + \|u(t)\|^p_{\mathring{H}^m(\Omega)}\big) \|u^N(t) - u(t)\|_{\mathring{H}^{m-1}(\Omega)} \|v\|_{\mathring{H}^m(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Bởi (2.19), $\|u^N(t)\|_{\mathring{H}^m(\Omega)} < +\infty$ và cũng vì $v \in \mathring{H}^m(\Omega)$ nên ta cũng có $\|v\|_{\mathring{H}^m(\Omega)} < +\infty$. Do đó

$$\begin{aligned}
&\big|\big(F_\alpha(\cdot, t, u^N, Du^N, \cdots, D^{m-1}u^N), D^\alpha v\big) \\
&\qquad\qquad - \big(F_\alpha(\cdot, t, u, Du, \cdots, D^{m-1}u), D^\alpha v\big)\big| \\
&\leq C\|u^N(t) - u(t)\|_{\mathring{H}^{m-1}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Áp dụng Định lý 1.5, $\mathring{H}^m(\Omega) \overset{com}{\hookrightarrow} \mathring{H}^{m-1}(\Omega)$. Vì vậy, nếu $u^N \rightharpoonup u$ yếu trong $\mathring{H}^m(\Omega)$ thì $u^N \to u$ mạnh trong $\mathring{H}^{m-1}(\Omega)$ (cũng có thể xem [65, Hệ quả 8.86]). Từ kết quả này, khi $N \to \infty$, với hầu khắp $t \in [0, T]$, ta kết luận

được rằng

$$\big(F_\alpha(\cdot,t,u^N,Du^N,\cdots,D^{m-1}u^N),D^\alpha v\big)$$
$$\to \big(F_\alpha(\cdot,t,u,Du,\cdots,D^{m-1}u),D^\alpha v\big), \quad (2.37)$$

Kết hợp (2.35), (2.36), (2.37), với mọi $v \in \mathring{H}^m(\Omega)$, ta có

$$(u_{tt}(t),v)+B[u(t),v;t]+\sum_{|\alpha|\le m-1}\Big(F_\alpha(\cdot,t,u,Du,\cdots,D^{m-1}u),D^\alpha v\Big)$$
$$=\big(h(\cdot,t),v\big), \quad (2.38)$$

3. Tiếp theo ta phải chứng minh $u(x,0)=0, u_t(x,0)=0,\ x\in\Omega$. Để thực hiện được điều này, ta lựa chọn hàm $v\in C^2\big([0,T];\mathring{H}^m(\Omega)\big)$ sao cho $v(T)=v_t(T)=0$. Ta có thể khẳng định luôn tồn tại hàm v thỏa mãn điều kiện chỉ ra, chẳng hạn $v(x,t)=(1+\cos t)\omega(x),\ t\in[0,\pi]$. Với hàm v được chọn, áp dụng tích phân từng phần, ta thấy rằng

$$\int_0^T\big(u_{tt}(t),v(t)\big)dt=-\big(u_t(0),v(0)\big)+\big(u(0),v_t(0)\big)+\int_0^T\big(u(t),v_{tt}(t)\big)dt.$$

Do đó (2.38) được biến đổi thành

$$\int_0^T\big((v_{tt}(t),u(t))+B[u(t),v(t);t]\big)dt$$
$$+\sum_{|\alpha|\le m-1}\int_0^T\Big(F_\alpha(\cdot,t,u,Du,\cdots,D^{m-1}u),D^\alpha v\Big)dt$$
$$=\int_0^T\big(h(x,t),v(t)\big)dt+\big(u_t(0),v(0)\big)-\big(u(0),v_t(0)\big). \quad (2.39)$$

Tương tự, ta cũng thu được

$$\int_0^T\big((v_{tt}(t),u^N(t))+B[u^N(t),v(t);t]\big)dt$$
$$+\sum_{|\alpha|\le m-1}\int_0^T\Big(F_\alpha(\cdot,t,u^N,Du^N,\cdots,D^{m-1}u^N),D^\alpha v\Big)dt$$

$$= \int_0^T \big(h(x,t), v(t)\big)dt + \big(u_t^N(0), v(0)\big) - \big(u^N(0), v_t(0)\big).$$

$$= \int_0^T \big(h(x,t), v(t)\big)dt.$$

Qua giới hạn khi $N \to \infty$, ta thu được từ đẳng thức trên rằng

$$\int_0^T \big[\big(v_{tt}(t), u(t)\big) + B[u(t), v(t); t]\big]dt$$
$$+ \sum_{|\alpha|\le m-1} \int_0^T \Big(F_\alpha(\cdot, t, u, Du, \cdots, D^{m-1}u), D^\alpha v\Big)dt = \int_0^T \big(h(\cdot, t), v\big)dt. \tag{2.40}$$

Từ (2.39) và (2.40) và bởi v là bất kỳ nên $v(0), v'(0)$ là tùy ý. Do đó ta có $u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0,\ x \in \Omega$.

4. Cuối cùng, từ (2.19), cho $N \to \infty$, $\|u\|^2_{H^{m,1}_*(Q_T)} \le C\Big(1 + \|h\|^2_{L_2\big(0,T;L_2(\Omega)\big)}\Big)$.

Định lý 2.2 được chứng minh. □

Định lý 2.3. *Với mỗi $h \in L_2\big(0,T; L_2(\Omega)\big)$, bài toán (2.3)−(2.5) có duy nhất nghiệm yếu địa phương $u \in H^{m,1}_*(Q_T)$.*

Chứng minh. Trước hết, ta giả thiết rằng $\omega_1, \omega_2 \in H^{m,1}_*(Q_T)$ là các nghiệm của bài toán (2.3)−(2.5). Khi đó bài toán

$$\begin{cases} u_{tt} + (-1)^m Lu \\ \qquad\qquad + \sum\limits_{|\alpha|\le m-1} (-1)^{|\alpha|} \widetilde{F}_\alpha(\omega_1, \omega_2, D, \cdots, D^{m-1}) = 0 \text{ trong } Q_T \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 \quad \text{trên } \Omega \\ \dfrac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\Big|_{S_T} = 0, \quad S_T := \partial\Omega \times (0,T) \end{cases}$$

nhận $u \in H^{m,1}_*(Q_T)$ là nghiệm yếu địa phương. Trong đó $u = \omega_1 - \omega_2$ và

$$\widetilde{F}_\alpha(\omega_1, \omega_2, D, \cdots, D^{m-1})$$
$$= F_\alpha(x, t, \omega_1, D\omega_1, \cdots, D^{m-1}\omega_1) - F_\alpha(x, t, \omega_2, D\omega_2, \cdots, D^{m-1}\omega_2)$$

Định lý 2.3 được chứng minh, nếu ta chứng minh $u(t) \equiv 0$ trên $[0, T]$. Thật vậy,

1. Với mỗi $s \in [0; T]$ đã được cố định, ta đặt

$$v(t) = \begin{cases} \int\limits_t^s u(\xi)d\xi & \text{nếu } 0 \le t \le s \\ 0 & \text{nếu } s \le t \le T. \end{cases}$$

Khi đó với mỗi $t \in [0, T]$, $v(t) \in \mathring{H}^m(\Omega)$. Ta có

$$\begin{aligned} &\langle u_{tt}(t), v(t)\rangle + B[u(t), v(t); t] \\ &\qquad + \sum_{|\alpha| \le m-1} \Big(\widetilde{F}_\alpha(\omega_1, \omega_2, D, \cdots, D^{m-1}), D^\alpha v\Big) = 0. \quad (2.41) \end{aligned}$$

Lấy tích phân cả hai vế của (2.41) theo biến t trên $[0, s], s \in [0, T]$, ta có

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^s \Big(\langle u_{tt}(t), v(t)\rangle + B[u(t), v(t); t]\Big)dt \\ &\qquad + \sum_{|\alpha| \le m-1} \int\limits_0^s \Big(\widetilde{F}_\alpha(\omega_1, \omega_2, D, \cdots, D^{m-1}), D^\alpha v\Big)dt = 0. \end{aligned}$$

Từ $u_t(0) = 0, v(s) = 0$ và lấy tích phân từng phần theo biến t cho hạng tử đầu tiên ở vế trái thì đẳng thức trên được biến đổi thành

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^s \Big(- \big(u_t(t), v_t(t)\big) + B[u(t), v(t); t]\Big)dt \\ &\qquad + \sum_{|\alpha| \le m-1} \int\limits_0^s \Big(\widetilde{F}_\alpha(\omega_1, \omega_2, D, \cdots, D^{m-1}), D^\alpha v\Big)dt = 0. \end{aligned}$$

Do $v_t(t) = -u(t)$ với $0 \le t \le s$ nên ta có

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^s \Big(\big(u_t(t), u(t)\big) - B[v_t(t), v(t); t]\Big)dt \\ &\qquad + \sum_{|\alpha| \le m-1} \int\limits_0^s \Big(\widetilde{F}_\alpha(\omega_1, \omega_2, D, \cdots, D^{m-1}), D^\alpha v\Big)dt = 0. \end{aligned}$$

Từ $a_{\alpha\beta}(x,t) = (-1)^{|\alpha|+|\beta|}a_{\beta\alpha}(x,t)$ $(|\alpha|, |\beta| = 0, 1, \cdots, m,\ (x,t) \in Q_T)$ và $\big(u_t(t), u(t)\big) = \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\Big)$, đẳng thức trên chuyển thành

$$\int_0^s \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} - \frac{1}{2}B[v(t), v(t); t]\Big)dt$$

$$+ \sum_{|\alpha|\le m-1}\int_0^s \Big(\widetilde{F}_\alpha(\omega_1, \omega_2, D, \cdots, D^{m-1}), D^\alpha v\Big)dt$$

$$= -\frac{(-1)^m}{2}\int_0^s\int_\Omega \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m}(-1)^{|\alpha|}a_{\alpha\beta t}D^\alpha v D^\beta v dxdt. \qquad (2.42)$$

Vì $u(0) = 0, v(s) = 0$ nên ta có từ (2.42) rằng

$$\frac{1}{2}\|u(s)\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{2}B[v(0), v(0); 0]$$

$$= -\sum_{|\alpha|\le m-1}\int_0^s \Big(\widetilde{F}_\alpha(\omega_1, \omega_2, D, \cdots, D^{m-1}), D^\alpha v\Big)dt$$

$$-\frac{(-1)^m}{2}\int_0^s\int_\Omega \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m}(-1)^{|\alpha|}a_{\alpha\beta t}D^\alpha v D^\beta v dxdt. \qquad (2.43)$$

Từ (2.2), áp dụng với $t = 0$, ta có

$$C\|v(0)\|^2_{\mathring{H}^m(\Omega)} \le B[v(0), v(0); 0]. \qquad (2.44)$$

Sử dụng (2.7), lập luận như trong chứng minh của Định lý 2.2, ta có

$$\big|\big(\widetilde{F}_\alpha(\omega_1, \omega_2, D, \cdots, D^{m-1}), D^\alpha v\big)\big|$$
$$\le C\Big(1 + \|\omega_1(t)\|^p_{\mathring{H}^m(\Omega)} + \|\omega_2(t)\|^p_{\mathring{H}^m(\Omega)}\Big)\|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{\mathring{H}^m(\Omega)}.$$

Từ (2.32), tồn tại các hằng số dương C_1, C_2 sao cho

$$\|\omega_1(t)\|^p_{\mathring{H}^m(\Omega)} \le C_1, \quad \|\omega_2(t)\|^p_{\mathring{H}^m(\Omega)} \le C_2$$

và chú ý rằng với bất kỳ đa chỉ số $\alpha, |\alpha| \le m-1$, luôn tồn tại hằng số dương C_α để sao cho $\|D^\alpha u(t)\|_{L_2(\Omega)} \le C_\alpha\|D^{m-1}u(t)\|_{L_2(\Omega)}$. Khi đó

$$\big|\big(\widetilde{F}_\alpha(\omega_1, \omega_2, D, \cdots, D^{m-1}), D^\alpha v\big)\big| \le C\|D^{m-1}u(t)\|_{L_2(\Omega)}\|v(t)\|_{\mathring{H}^m(\Omega)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Gagliardo-Nirenberg, ta khẳng định được rằng

$$\|D^{m-1}u(t)\|_{L_2(\Omega)} \le C\|D^m u(t)\|_{L_2(\Omega)}^{1-\frac{1}{m}}\|u(t)\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{1}{m}} \le C\|u(t)\|_{\mathring{H}^m(\Omega)}^{1-\frac{1}{m}}\|u(t)\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{1}{m}}.$$

Do đó

$$\big|\big(\widetilde{F}_\alpha(\omega_1,\omega_2,D,\cdots,D^{m-1}),D^\alpha v\big)\big| \le C\|u(t)\|_{\mathring{H}^m(\Omega)}^{1-\frac{1}{m}}\|u(t)\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{1}{m}}\|v(t)\|_{\mathring{H}^m(\Omega)}.$$

Sử dụng (2.32), tồn tại hằng số dương K sao cho $\|u(t)\|_{\mathring{H}^m(\Omega)}^{1-\frac{1}{m}} \le K$. Do đó, ta kết luận được rằng

$$\big|\big(\widetilde{F}_\alpha(\omega_1,\omega_2,D,\cdots,D^{m-1}),D^\alpha v\big)\big| \le C\|v(t)\|_{\mathring{H}^m(\Omega)}\|u(t)\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{1}{m}}. \quad (2.45)$$

Thêm nữa, bởi $a_{\alpha\beta} \in C^1(\overline{Q}_T)$, nên ta có

$$\Big|\int_0^s\int_\Omega \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m}(-1)^{|\alpha|}a_{\alpha\beta t}D^\alpha v D^\beta v\,dxdt\Big| \le C\int_0^s \|v(t)\|_{\mathring{H}^m(\Omega)}^2 dt. \quad (2.46)$$

Từ (2.43)−(2.46), ta kết luận rằng

$$\begin{aligned}\|u(s)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|v(0)\|_{\mathring{H}^m(\Omega)}^2 &\le C\Big(\int_0^s \|v(t)\|_{\mathring{H}^m(\Omega)}\|u(t)\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{1}{m}}dt \\ &\qquad + \int_0^s \|v(t)\|_{\mathring{H}^m(\Omega)}^2 dt\Big) \\ &\le C\int_0^s \big(\|u(t)\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{2}{m}} + \|v(t)\|_{\mathring{H}^m(\Omega)}^2\big)dt. \quad (2.47)\end{aligned}$$

2. Tiếp theo, ta đặt $\omega(t) = \int_0^t u(\xi)d\xi$ với $0 \le t \le T$. Từ chỗ $v(0) = \omega(s)$ và $v(t) = \omega(s) - \omega(t)$, (2.47) trở thành

$$\begin{aligned}&\|u(s)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\omega(s)\|_{\mathring{H}^m(\Omega)}^2 \\ &\qquad \le C\int_0^s \big(\|\omega(s)-\omega(t)\|_{\mathring{H}^m(\Omega)}^2 + \|u(t)\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{2}{m}}\big)dt. \quad (2.48)\end{aligned}$$

Từ đánh giá $\|\omega(s)-\omega(t)\|^2_{\mathring{H}^m(\Omega)} \le 2\|\omega(s)\|^2_{\mathring{H}^m(\Omega)} + 2\|\omega(t)\|^2_{\mathring{H}^m(\Omega)}$, (2.48) đưa đến

$$\|u(s)\|^2_{L_2(\Omega)} + (1-2C_1 s)\|\omega(s)\|^2_{\mathring{H}^m(\Omega)} \le C_1 \int_0^s \big(\|u(t)\|^{\frac{2}{m}}_{L_2(\Omega)} + \|\omega(t)\|^2_{\mathring{H}^m(\Omega)}\big)dt.$$

Chọn T_1 đủ nhỏ sao cho $1-2T_1C_1 \ge \dfrac{1}{2}$. Khi đó nếu $0 \le s \le T_1$ thì

$$\|u(s)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\omega(s)\|^2_{\mathring{H}^m(\Omega)} \le C \int_0^s \big(\|u(t)\|^{\frac{2}{m}}_{L_2(\Omega)} + \|\omega(t)\|^2_{\mathring{H}^m(\Omega)}\big)dt.$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall trong Bổ đề 1.4, ta thu được $u(t) \equiv 0$ trên $t \in [0, T_1]$.

3. Lập luận tương tự như trên đối với các khoảng $[T_1, 2T_1], [2T_1, 3T_1], \cdots$ thì ta thu được $u \equiv 0$ trên $[0, T]$. □

2.3. Sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm yếu toàn cục

Trong mục trước, ta đã khẳng định sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm yếu địa phương của bài toán (2.3)−(2.5). Trong mục này, ta sẽ chứng tỏ sự tồn tại duy nhất của nghiệm yếu toàn cục của bài toán. Từ các Định lý 2.2 và Định lý 2.3, ta có định lý sau:

Định lý 2.4. *Với mỗi $h \in L_2\big(0,\infty; L_2(\Omega)\big)$, bài toán (2.3)−(2.5) có duy nhất nghiệm yếu toàn cục $u \in H^{m,1}_*(Q)$.*

Chứng minh. 1. Trước hết ta khẳng định bài toán

$$\begin{cases} u_{tt}(t) + (-1)^m Lu + F(\cdot, t, u, Du, \cdots, D^{2m-2}u) = h(\cdot, t) \\ u(t_n) = 0,\ u_t(t_n) = 0, \\ \dfrac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\Big|_{S_{t_{\max}}} = 0, \end{cases} \tag{2.49}$$

với mọi $t \in [t_n, t_{\max}], t_n \ge 0$, có duy nhất nghiệm $u \in H^{m,1}_*(Q_{t_{\max}})$. Để

thực hiện được điều này, ta đặt $\widetilde{u}(t) = u(t+t_n)$, bài toán (2.49) trở thành

$$\begin{cases} \widetilde{u}_{tt}(t) + (-1)^m L\widetilde{u} + F(\cdot, t, \widetilde{u}, D\widetilde{u}, \cdots, D^{2m-2}\widetilde{u}) = h(\cdot, t), \\ \widetilde{u}(0) = 0, \widetilde{u}_t(0) = 0, \\ \dfrac{\partial^j}{\partial \nu^j}\Big|_{S_{T^*}} \end{cases} \tag{2.50}$$

với mọi $t \in [0, T^*]$, có duy nhất nghiệm $\widetilde{u} \in H_*^{m,1}(Q_{T^*})$.

Áp dụng bài toán (2.3)−(2.5), từ các kết quả đã chứng minh, bài toán (2.50) luôn luôn tồn tại duy nhất nghiệm $\widetilde{u} \in H_*^{m,1}(Q_{T^*})$. Do đó bài toán (2.49) có duy nhất nghiệm $u \in H_*^{m,1}(Q_{t_{\max}})$.

2. Giả thiết rằng nghiệm u của bài toán (2.3)−(2.5) xác định trên $[0, t_{\max})$. Áp dụng Định lý 2.2, ta có $\|u(t)\|_{\mathring{H}^m(\Omega)} \leq M$ với $t \in [0, t_{\max})$. Ta sẽ chứng minh $t_{\max} = +\infty$.

Thật vậy, giả sử $t_{\max} < +\infty$, $\lim\limits_{t \to t_{\max}^-} \|u(t)\|_{\mathring{H}^m(\Omega)} < +\infty$. Khi đó tồn tại dãy $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ và $K > 0$ sao cho khi $n \to \infty, t_n \to t_{\max}^-$ thì $\|u(t)\|_{\mathring{H}^m(\Omega)} < K$. Với dữ liệu ban đầu $u(t_n)$, trên $[t_n, t_n + T^*)$ bài toán (2.3)−(2.5) có duy nhất nghiệm với mỗi n và do đó khi n đủ lớn thì $t_n + T^* > t_{\max}$. Vì vậy nghiệm u của bài toán (2.3)−(2.5) xác định trên một khoảng chứa $[0, t_{\max})$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vì vậy $t_{\max} = +\infty$. □

Để làm rõ sự tồn tại của bài toán (2.3)−(2.5), ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 2.1. Ta xét bài toán (2.3)−(2.5) với $m = 2$ và

$$F(x, t, u, Du, D^2u) = u|u|^p - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^p\right), \tag{2.51}$$

với $\dfrac{2}{n} \leq p \leq \dfrac{2}{n-2}, n > 2$.

Ta nhắc lại các kết quả đã khẳng định ở đầu chương. Ta thấy rằng $F_0 = u|u|^p, F_{1i} = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}\Big|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^p$ và $A(x, t, u, Du) = \dfrac{1}{p+2}|u|^{p+2} + \dfrac{1}{p+2}\Big|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^{p+2}$. Rõ ràng $F_0 = \dfrac{\partial A}{\partial v_0}, F_1 = \dfrac{\partial A}{\partial v_1}$. Ngoài ra,

$$|F_0(x, t, v, Dv) - F_0(x, t, w, Dw)| = |v|v|^p - w|w|^p| = |\xi||v - w|,$$

ở đây $\xi = \xi(x,t)$ là hàm đã cho. Áp dụng định lý Lagrange, ta thấy rằng $|\xi| \le (p+1)(|v|^p + |w|^p)$. Vì vậy, ta có

$$|F_0(x,t,v,Dv) - F_0(x,t,w,Dw)| = (p+1)(|v|^p + |w|^p)|v-w|.$$

Bởi lập luận như trên. Ta có F_0, F_1 thỏa mãn điều kiện (2.7). Dễ dàng thấy rằng các điều kiện (2.6), (2.8) và (2.9) là hiển nhiên. Theo Định lý 2.4, Bài toán (2.3)−(2.5) với $m = 2$ và F được xác định như (2.51), có duy nhất nghiệm yếu toàn cục trong $H^{2,1}_*(Q)$.

Trong ví dụ sau đây, ta xét phương trình nửa tuyến tính *Klein-Gordon* [56, Mục 10.4] trong miền trụ vô hạn Q.

Ví dụ 2.2. Ta xét bài toán

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + qu - g(x,t,u) = 0 & (x,t) \in Q, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 & x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0 & (x,t) \in \Gamma \times (0,\infty). \end{cases} \tag{2.52}$$

Ở đây $q > -\lambda_1$ với $\lambda_1 > 0$ là giá trị riêng nhỏ nhất của toán tử $-\Delta$ trên $H^{-1}(\Omega)$, tức $\lambda_1 = \inf\{\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} : \ u \in \mathring{H}^1(\Omega), \ \|u\|_{L_2(\Omega)} = 1\}$.

Ta giả thiết rằng với hầu khắp $t \in [0,\infty), x \in \Omega$, ta có

$$|g(x,t,u)| \le C(1 + |u|^{p+1}), \tag{2.53}$$

$$|g(x,t,u) - g(x,t,v)| \le C(1 + |u|^p + |v|^p)|u-v|, \tag{2.54}$$

$$g(x,t,0) = 0, g_t(x,t,0) = 0, \quad \left|\frac{\partial g}{\partial t}(x,t,u)\right| \le C|u|^{p-1}. \tag{2.55}$$

$$\int_0^u g(x,t,s)ds \le 0 \text{ hầu khắp } t \in [0,\infty) \text{ và hầu khắp } x \in \Omega. \tag{2.56}$$

Trong đó $\frac{2}{n} \le p \le \frac{2}{n-2}$ khi $n > 2$ và $1 \le p < \infty$ khi $n = 2$. Đối chiếu với bài toán (2.3)-(2.5), ta thấy bài toán (2.52) ứng với trường hợp $m = 1, Lu = -\Delta u + qu, F(x,t,u) = -g(x,t,u)$ và $h(x,t) \equiv 0$ trên Q. Từ giả thiết $q > -\lambda_1$, tồn tại hằng số dương θ sao cho với mọi $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ và với mọi $t \in [0,+\infty)$, $B[u,u;t] \ge \theta\|u\|_{\mathring{H}^1(\Omega)}$. Ta nhận thấy $F_0(x,t,u) := F(x,t,u)$. Từ (2.54), ta có

$$|F_0(x,t,u) - F_0(x,t,v)| \le C(1 + |u|^p + |v|^p)|u-v|.$$

Hàm $A = A(x,t,u)$ sao cho $\dfrac{\partial A}{\partial u} = F_0(x,t,u) = -g(x,t,u)$ thì

$$A(x,t,u) = -\int_0^u g(x,t,s)ds.$$

Điều này có được là do giả thiết $g(x,t,0) = 0$. Từ (2.55), áp dụng định lý Lagrange ta thu được $\left|\dfrac{\partial A}{\partial t}\right| \leq C(1+|u|^p)$. Ta nhận thấy $A(x,0,0) = 0$ và từ giả thiết (2.56), ta thu được

$$\int_\Omega A(x,t,u)dx \geq 0 \text{ với hầu khắp } t \in [0,\infty).$$

Do đó bài toán (2.52) có duy nhất nghiệm yếu trong $H^{1,1}(Q)$. Minh họa cho điều kiện (2.56), ta có thể xét hàm $g(x,t,u) = -|\cos u|$.

Kết luận chương 2

Trong chương 2, chúng tôi đã sử dụng phương pháp xấp xỉ Galerkin và áp dụng các định lý nhúng trong các không gian Sobolev chứng minh tính giải được duy nhất nghiệm trong không gian $H_*^{m,1}(Q)$ của bài toán biên ban đầu đối với phương trình hyperbolic nửa tuyến tính bậc cao trong hình trụ vô hạn Q không trơn tổng quát. Phương trình của bài toán có chứa lớp hàm phi tuyến F tổng quát, đồng thời bài toán được xét trong hình trụ không trơn bất kỳ. Vì vậy kết quả đạt được của chương này tổng quát hơn so với cùng kết quả trong [54, 9, 10, 64, 66, 46, 33, 37, 41].

Chương 3

BÀI TOÁN DIRICHLET-CAUCHY ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH HYPERBOLIC NỬA TUYẾN TÍNH TRONG CÁC MIỀN ĐA DIỆN

Trong chương này, chúng tôi xét bài toán biên ban đầu thứ nhất đối với phương trình hyperbolic nửa tuyến tính cấp hai trong miền có cạnh, miền nón có cạnh. Sử dụng định lý điểm bất động, chúng tôi khẳng định sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu của bài toán nửa tuyến tính trong miền có cạnh và trong miền nón có cạnh. Hơn nữa, chúng tôi còn khẳng định các nghiệm yếu này đủ trơn thuộc các không gian Sobolev có trọng.

3.1. Bài toán Dirichlet-Cauchy đối với phương trình hyperbolic nửa tuyến tính trong miền có cạnh

3.1.1. Mở đầu

Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ $(n > 2)$ với biên $\partial\Omega$ bao gồm hai $(n-1)-$phẳng Γ_1, Γ_2 giao nhau theo $(n-2)-$phẳng l_0 là đa tạp. Giả thiết rằng trong lân cận của mỗi điểm thuộc l_0, tập $\overline{\Omega}$ đồng phôi với góc nhị diện. Tại điểm bất kỳ $P \in l_0$, luôn xác định hai nửa $(n-1)-$phẳng $T_1(P)$ và $T_2(P)$ tiếp xúc với Ω và một phẳng hai chiều $\pi(P)$ trực giao với l_0. Ta ký hiệu bởi $\beta(P)$ là độ lớn của góc trong phẳng $\pi(P)$ bị chặn bởi các tia $R_1 = T_1(P) \cap \pi(P), R_2 = T_2(P) \cap \pi(P)$. Với mỗi $0 < \tau \leq T < \infty$, đặt $Q_\tau = \Omega \times (0, \tau), S_\tau = \partial\Omega \times (0, \tau)$.

Trên Q_T, ta xét toán tử vi phân cấp hai L có dạng

$$L(x,t,\partial)u = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u, \quad (3.1)$$

ở đây a_{ij}, b_i, c là các hàm số thực thuộc $C^{k+1}(Q_T)$. Ta giả thiết rằng các hệ số của toán tử L cùng các đạo hàm của chúng bị chặn trên Q_T. Thêm nữa, ta giả thiết rằng a_{ij} $(i, j = 1, \cdots, n)$ liên tục theo $x \in \overline{\Omega}$, đều theo

$t \in [0,T]$, $a_{ij} = a_{ji}$, $(i,j = 1, \cdots, n)$ và

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \mu_0|\xi|^2, \tag{3.2}$$

với mọi $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ và tất cả $(x,t) \in Q_T$, ở đây μ_0 là hằng số dương.

Như đã nêu ra ở trên, tại mỗi $P \in l_0$ ta xác định hai siêu phẳng $T_1(P), T_2(P)$ tương ứng tiếp xúc với Γ_1, Γ_2 và phẳng hai chiều $\pi(P)$ trực giao với l_0, $\beta(P)$ là độ lớn của góc trong $\pi(P)$ được giới hạn bởi các tia $R_1 = T_1(P) \cap \pi(P)$,$R_2 = T_2(P) \cap \pi(P)$. Khi đó $0 < \beta(P) < 2\pi, \beta(P) \neq \pi$ và $\beta(P) \in C^\infty(l_0)$. Tính kì dị của nghiệm được đặc trưng bởi hàm $\omega(P)$, được xây dựng như sau: Với dãy các tập con $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in I}$ (I là tập chỉ số) đủ mịn phủ Ω, do l_0 trơn và có $(n-2)$ chiều, vì thế qua mỗi $x \in \Omega$ tồn tại $n \in I$ sao cho $x \in \mathcal{U}_n \subset \Omega$ và $2-$phẳng trực giao với l_0, $2-$phẳng này giao l_0 tại P (là điểm thuộc l_0 mà có khoảng cách tới x là nhỏ nhất). Ta thiết lập tương ứng $1-1$ giữa x và (x', P), ở đây $x' = (x_1, x_2)$ là tọa độ afin của x trong mặt phẳng $\pi(P)$. Ta biến đổi phần chính của toán tử L, toán tử với hệ số hằng tại P

$$L_0^{(2)} = -\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(P,t_0)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad t_0 \in (0,T)$$

về dạng chính tắc. Qua phép biến đổi tuyến tính các tọa độ từ tọa độ afin sang tọa độ cực trong $2-$ phẳng $\pi(P)$, góc $\beta(P,t_0)$ trở thành $\omega(P,t_0)$ và nó được gọi là giá trị rút gọn của $\beta(P,t_0)$. Người ta đã chứng minh được rằng $\omega(P,t_0)$ không phụ thuộc vào phép biến đổi đưa $L_0^{(2)}$ về dạng chính tắc, hơn nữa hàm $\omega(P,t_0)$ khả vi vô hạn và $\omega(P,t_0) > 0$. Cụ thể, góc $\beta(P)$ tại (P,t_0) được biến đổi thành

$$\omega(P,t_0) = \arctan \frac{[a_{11}(P,t_0)a_{22}(P,t_0) - a_{12}^2(P,t_0)]^{\frac{1}{2}}}{a_{22}(P,t_0)\cot\beta(P) - a_{12}(P,t_0)}.$$

Tương ứng với toán tử vi phân L có dạng (3.1), ta có dạng song tuyến tính phụ thuộc thời gian

$$B[u,v;t] = \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}v + c(x,t)uv \Big) dx, \tag{3.3}$$

với mọi $u, v \in \mathring{H}^1(\Omega)$ và $(x,t) \in Q_T$.

Ta xét bài toán Cauchy-Dirichlet đối với phương trình hyperbolic nửa tuyến tính trong miền có cạnh Ω như sau:

$$u_{tt} + L(x,t,\partial)u = f(x,t,u,Du) + h(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{3.4}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad x \in \Omega \tag{3.5}$$

$$u|_{S_T} = 0, \tag{3.6}$$

ở đây f, h là các hàm đã cho.

Định nghĩa 3.1. Hàm $u(x,t)$ được gọi là nghiệm yếu của bài toán (3.4)−(3.6) trên $[0,T]$ nếu $u \in L_2\big(0,T;\mathring{H}^1(\Omega)\big), u_t \in L_2\big(0,T;L_2(\Omega)\big), u_{tt} \in L_2\big(0,T;H^{-1}(\Omega)\big)$, đồng thời $u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0,\ x \in \Omega$ và đẳng thức

$$\langle u_{tt}(t), v\rangle + B[u(t), v; t] = \big(f(\cdot,t,u,Du), v\big) + \big(h(\cdot,t), v\big)$$

đúng với tất cả $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$ và hầu khắp $t \in [0,T]$.

Để khẳng định các kết quả của bài toán (3.4)-(3.6), ta chứng minh sự tồn tại duy nhất và tính chính quy của nghiệm yếu theo biến thời gian của bài toán tuyến tính tương ứng, tức là bài toán (3.4)−(3.6) trong trường hợp $f(x,t,u,Du) \equiv 0$ trên Q_T.

3.1.2. Bài toán tuyến tính

a. Sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu của bài toán tuyến tính

Khi $f(x,t,u,Du) \equiv 0$ trên Q_T, ta có bài toán sau:

$$u_{tt} + L(x,t,\partial)u = h(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{3.7}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad x \in \Omega \tag{3.8}$$

$$u|_{S_T} = 0. \tag{3.9}$$

Theo Định nghĩa 3.1, hàm $u(x,t)$ được gọi là nghiệm yếu của bài toán (3.7)−(3.9) trên $[0,T]$ nếu $u \in L_2\big(0,T;\mathring{H}^1(\Omega)\big), u_t \in L_2\big(0,T;L_2(\Omega)\big)$, $u_{tt} \in L_2\big(0,T;H^{-1}(\Omega)\big)$ đồng thời $u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0, x \in \Omega$ và

$$\langle u_{tt}(t), v\rangle + B[u(t), v; t] = \big(h(\cdot,t), v\big) \tag{3.10}$$

thỏa mãn với tất cả $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$ và với hầu khắp $t \in [0,T]$.

Sử dụng phương pháp xấp xỉ Galerkin và áp dụng tính chất của hội tụ yếu, ta có định lý sau

Định lý 3.1. *Nếu $h \in C\big(0,T;L_2(\Omega)\big)$ thì bài toán (3.7)−(3.9) có duy nhất nghiệm yếu $u(t) \in \mathring{H}^1(\Omega), t \in [0,T]$ thỏa mãn*

$$\|u(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)} + \|u_t(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \le C \int\limits_0^t \|h(s)\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad \forall t \in (0,T], \tag{3.11}$$

với C là hằng số dương phụ thuộc vào Ω, T và các hệ số của toán tử L.

Chứng minh. 1. Lập luận tương tự như nội dung đầu trong mục 2.2., ta thu được dãy xấp xỉ nghiệm $\{u^N(t)\}_{N=1}^{\infty}$ có dạng

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} g_k(t)\omega_k(x) \tag{3.12}$$

của bài toán (3.7)−(3.9) sao cho

$$\big(u^N_{tt}(t), \omega_k\big) + B[u^N(t), \omega_k; t] = \big(h(x,t), \omega_k\big), \tag{3.13}$$

với $k = 1, 2, \cdots, N$ và $t \in [0;T]$. Ở đây $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ là cơ sở trực giao trong $\mathring{H}^1(\Omega)$, đồng thời là cơ sở trực chuẩn trong $L_2(\Omega)$. Các hàm $g_k(t)$ $(0 \le t \le T, k = 1, \cdots, N)$ được lựa chọn sao cho $g_k(0) = 0,\ g'_k(0) = 0$.

2. Từ (3.13), nhân cả hai vế với g'_k, lấy tổng theo $k = 1, \cdots, N$, ta được

$$\big(u^N_{tt}(t), u^N_t(t)\big) + B[u^N(t), u^N_t(t); t] = \big(h(x,t), u^N_t\big). \tag{3.14}$$

Ta thấy rằng

$$\begin{aligned} B[u^N, u^N_t; t] &= \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u^N}{\partial x_i} \frac{\partial u^N_t}{\partial x_j} dx + \int\limits_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u^N}{\partial x_i} u^N_t + c u^N u^N_t \Big) dx \\ &=: B_1 + B_2. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Do đó (3.14) được viết thành

$$\big(u^N_{tt}(t), u^N_t(t)\big) + B_1 = \big(h(x,t), u^N_t\big) - B_2. \tag{3.16}$$

Ta có

$$\big(u^N_{tt}(t), u^N_t(t)\big) = \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|u^N_t(t)\|_{L_2(\Omega)}\Big). \tag{3.17}$$

Từ giả thiết $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, \cdots, n)$, ta nhận được

$$B_1 = \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}A[u^N(t), u^N(t); t]\Big) - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ijt}\frac{\partial u^N}{\partial x_i}\frac{\partial u^N}{\partial x_j}dx$$
$$\geq \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}A[u^N(t), u^N(t); t]\Big) - C\|u^N(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)}, \tag{3.18}$$

ở đây $A[u, v; t] = \int\limits_{\Omega}\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx$. Thêm nữa,

$$|B_2| \leq C\big(\|u^N(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)} + \|u^N_t(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\big). \tag{3.19}$$
$$|\big(h(\cdot, t), u^N_t(t)\big)| \leq \frac{1}{2}\big(\|h(\cdot, t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u^N_t(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\big). \tag{3.20}$$

Từ (3.16)−(3.20), ta thu được

$$\frac{d}{dt}\big(\|u^N_t(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + A[u^N(t), u^N(t); t]\big)$$
$$\leq C\big(\|h(\cdot, t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u^N_t(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u^N(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)}\big).$$

Áp dụng (3.2), ta có

$$\frac{d}{dt}\Big(\|u^N_t(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + A[u^N(t), u^N(t); t]\Big)$$
$$\leq C_1\big(\|u^N_t(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + A[u^N(t), u^N(t); t]\big) + C_2\|h(\cdot, t)\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{3.21}$$

Đặt $\eta(t) = \|u^N_t(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + A[u^N(t), u^N(t); t],\ \theta(t) = \|h(\cdot, t)\|^2_{L_2(\Omega)}$. Khi đó (3.21) được viết thành

$$\eta'(t) \leq C_1\eta(t) + C_2\theta(t). \tag{3.22}$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall, ta thu được từ (3.22) như sau

$$\|u^N_t(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + A[u^N(t), u^N(t); t] \leq C\int\limits_0^t \|h(s)\|^2_{L_2(\Omega)}ds.$$

Sử dụng (3.2) một lần nữa, bất đẳng thức

$$\|u^N(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)} + \|u^N_t(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \leq C\int\limits_0^t \|h(s)\|^2_{L_2(\Omega)}ds, \tag{3.23}$$

đúng với mọi $t \in [0, T]$.

3. Tiếp theo, cố định $\eta \in \mathring{H}^1(\Omega)$, $\|\eta\|_{\mathring{H}^1(\Omega)} \leq 1$ và ta viết $\eta = \eta_1 + \eta_2$, ở đây $\eta_1 \in span\{\omega_k\}_{k=1}^N$ và $(\eta_2, \omega_k) = 0$, $k = 1, \cdots, N$. Ta nhận thấy rằng, từ $\|\eta\|_{\mathring{H}^1(\Omega)} \leq 1$ thì $\|\eta_1\|_{\mathring{H}^1(\Omega)} \leq 1$. Do đó

$$\langle u_{tt}^N(t), \eta \rangle = \big(u_{tt}^N(t), \eta_1\big) = \big(h(x,t), \eta_1\big) - B[u^N, \eta_1; t].$$

Ta có $|\langle u_{tt}^N(t), \eta_1 \rangle| \leq C\big(\|h(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega)} + \|u^N(t)\|_{\mathring{H}^1(\Omega)}\big)$. Do đó

$$\|u_{tt}^N(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq C\big(\|h(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|u^N(t)\|_{\mathring{H}^1(\Omega)}^2\big).$$

Lấy tích phân trên $[0, t]$ với $0 \leq t \leq T$ và áp dụng (3.23), ta thu được

$$\|u^N\|_{L_2\big(0,t;H^{-1}(\Omega)\big)}^2 \leq C\|h\|_{L_2\big(0,t;L_2(\Omega)\big)}^2. \tag{3.24}$$

Từ (3.23) và (3.24), ta thấy dãy $\{u^N\}_{N=1}^\infty$ bị chặn trong $L_2\big(0, T; \mathring{H}^1(\Omega)\big)$, dãy $\{u_t^N\}_{N=1}^\infty$ bị chặn trong $L_2\big(0, T; L_2(\Omega)\big)$ và dãy $\{u_{tt}^N\}_{N=1}^\infty$ bị chặn trong $L_2\big(0, T; H^{-1}(\Omega)\big)$. Do đó tồn tại dãy con $\{u^{N_j}\}_{j=1}^\infty \subset \{u^N\}_{N=1}^\infty$ và $u \in L_2\big(0, T; \mathring{H}^1(\Omega)\big)$ sao cho $u_t \in L_2\big(0, T; L_2(\Omega)\big), u_{tt} \in L_2\big(0, T; H^{-1}(\Omega)\big)$ thỏa mãn $u^{N_j} \rightharpoonup u$ trong $L_2\big(0, T; \mathring{H}^1(\Omega)\big)$; $u_t^{N_j} \rightharpoonup u_t$ trong $L_2\big(0, T; L_2(\Omega)\big)$ và $u_{tt}^{N_j} \rightharpoonup u_{tt}$ trong $L_2\big(0, T; H^{-1}(\Omega)\big)$.

Bây giờ ta cố định $m \in \mathbb{N}$ và chọn $\theta \in C^1\big([0, T]; \mathring{H}^1(\Omega)\big)$ sao cho

$$\theta(t) = \sum_{k=1}^m d^k(t)\omega_k, \tag{3.25}$$

ở đây $\{d^k\}_{k=1}^m$ là các hàm nhẵn. Ta chọn số tự nhiên $N \geq m$, nhân cả hai vế của (3.13) với d^k và lấy tổng theo $k = 1, \cdots, m$, tiếp theo lấy tích phân theo t trên $[0, T]$, ta được

$$\int_0^T \big[\langle u_{tt}^N(t), \theta(t)\rangle + B[u^N(t), \theta(t); t]\big]dt = \int_0^T \big(h(x,t), \theta(t)\big)dt. \tag{3.26}$$

Đặt $N := N_j$, lấy giới hạn khi $j \to \infty$, (3.26) đưa đến

$$\int_0^T \Big[\langle u_{tt}(t), \theta(t)\rangle + B[u(t), \theta(t); t]\Big]dt = \int_0^T \big(h(x,t), \theta(t)\big)dt. \tag{3.27}$$

Vì $C^1\big([0,T];\mathring{H}^1(\Omega)\big)$ trù mật trong $L_2\big(0,T;\mathring{H}^1(\Omega)\big)$ nên ta có

$$\int_0^T \Big[\langle u_{tt}(t),\widetilde{\theta}\rangle + B[u(t),\widetilde{\theta};t]\Big]dt = \int_0^T \big(h(x,t),\widetilde{\theta}\big)dt, \tag{3.28}$$

với mọi $\widetilde{\theta} \in L_2\big(0,T;\mathring{H}^1(\Omega)\big)$ và hầu khắp $t \in [0,T]$. Hơn nữa, ta có thể chọn $\widetilde{\theta}(x,t) = g(t)\omega(x),\ \omega \in \mathring{H}^1(\Omega)$ thì (3.28) được viết thành

$$\int_0^T \Big[\langle u_{tt}(t),\omega\rangle + B[u(t),\omega;t] - \big(h,\omega\big)\Big]g(t)\,dt = 0,$$

với hầu khắp $t \in [0,T]$. Do đó

$$\langle u_{tt}(t),\omega\rangle + B[u(t),\omega;t] = \big(h(\cdot,t),\omega\big)$$

với hầu khắp $t \in [0,T],\ \forall\,\omega \in \mathring{H}^1(\Omega)$.

4. Tiếp theo, ta phải chứng minh $u(0) = 0, u_t(0) = 0$. Để chứng minh được điều này, ta chọn bất kỳ $\gamma \in C^2\big([0,T];\mathring{H}^1(\Omega)\big)$ sao cho $\gamma(T) = \gamma_t(T) = 0$. Áp dụng tích phân từng phần hai lần theo biến t của hạng tử đầu tiên bên vế trái của hệ thức

$$\int_0^T (u_{tt}(t),\gamma)dt + \int_0^T B[u(t),\gamma;t]dt = \int_0^T \big(h(x,t),\gamma\big)dt$$

ta được

$$\int_0^T (u(t),\gamma_{tt})dt + \int_0^T B[u(t),\gamma;t]dt = \int_0^T \big(h(x,t),\gamma\big)dt + \big(u(0),\gamma_t(0)\big) - \big(u_t(0),\gamma(0)\big). \tag{3.29}$$

Lập luận tương tự như trên đối với hệ thức

$$\int_0^T (u_{tt}^N(t);\gamma)dt + \int_0^T B[u^N(t),\gamma;t]dt = \int_0^T \big(h(x,t),\gamma\big)dt,$$

ta cũng thu được

$$\int_0^T (u^N(t), \gamma_{tt})dt + \int_0^T B[u^N(t), \gamma; t]dt = \int_0^T \big(h(x,t), \gamma\big)dt$$
$$+ \big(u^N(0), \gamma_t(0)\big) - \big(u_t^N(0), \gamma(0)\big). \quad (3.30)$$

Trong (3.30), đặt $N := N_j$, qua giới hạn khi $j \to \infty$, ta có

$$\int_0^T (u(t), \gamma_{tt})dt + \int_0^T B[u(t), \gamma; t]dt = \int_0^T \big(h(x,t), \gamma\big)dt \quad (3.31)$$

Bởi (3.29) và (3.31) đúng với mọi $\gamma \in C^2\big([0,T]; \mathring{H}^1(\Omega)\big)$ nên ta thu được trên $[0,T]$ rằng $u(0) = 0, u_t(0) = 0$. Với các kết quả trên, ta đã chứng minh được bài toán (3.7)−(3.8) có nghiệm yếu $u(t) \in \mathring{H}^1(\Omega)$.

5. Điều còn lại, ta phải chứng minh rằng u là nghiệm yếu duy nhất. Thật vậy, giả sử rằng bài toán (3.7)−(3.8) có hai nghiệm u_1, u_2. Đặt $u = u_1 - u_2$. Khi đó u là nghiệm yếu của bài toán

$$u_{tt} + L(x,t,\partial)u = 0, \qquad (x,t) \in Q_T, \quad (3.32)$$
$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega, \quad (3.33)$$
$$u|_{S_T} = 0. \quad (3.34)$$

Để chứng minh tính duy nhất nghiệm yếu của bài toán (3.7)−(3.8), ta chứng minh $u(t) \equiv 0$ trên $[0,T]$. Muốn vậy, ta cố định $s \in [0,T]$ và đặt

$$\mu(t) = \begin{cases} \int_t^s u(\tau)d\tau, & \text{nếu } 0 \le t \le s, \\ 0, & \text{nếu } s \le t \le T. \end{cases}$$

Ta có $\mu(t) \in \mathring{H}^1(\Omega)$ với mỗi $t \in [0,T]$. Do $u(t) \in \mathring{H}^1(\Omega)$ là nghiệm yếu của bài toán (3.32)−(3.34), nên ta có

$$\langle u_{tt}(t), v\rangle + B[u(t), v; t] = 0, \quad \text{với } \forall\, v \in \mathring{H}^1(\Omega).$$

Thay v bởi $\mu(t)$ và lấy tích phân theo biến t trên $[0,s]$, ta có

$$\int_0^s \Big(\langle u_{tt}(t), \mu(t)\rangle + B[u(t), \mu(t); t]\Big)dt = 0.$$

Ta nhận thấy $u_t(0) = \mu(s) = 0$. Do đó, áp dụng tích phân từng phần cho hạng tử đầu của đẳng thức trên, ta thu được

$$\int_0^s \big(-(u_t(t), \mu_t(t)) + B[u(t), \mu(t); t]\big) dt = 0.$$

Với mỗi $t \in [0, s]$, ta có $\mu_t(t) = -u(t)$. Khi đó

$$\int_0^s \Big(\langle u_t(t), u(t)\rangle - B[\mu_t(t), \mu(t); t]\Big) dt = 0. \tag{3.35}$$

Chú ý rằng

$$\langle u_t(t), u(t)\rangle = \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\Big),$$

$$B[\mu_t(t), \mu(t); t] = \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}B[\mu(t), \mu(t); t]\Big) - \big(C[u(t), \mu(t); t] + D[\mu(t), \mu(t); t]\big),$$

điều này có được là nhờ $\mu_t(t) = -u(t)$. Ở đây

$$2C[u, \mu; t] = -\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n b_i u \frac{\partial \mu}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n b_i \mu \frac{\partial \mu_t}{\partial x_i} \right) dx,$$

$$2D[\mu, \mu; t] = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ijt} \frac{\partial \mu}{\partial x_i}\frac{\partial \mu}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_{it}\frac{\partial \mu}{\partial x_i}\mu + c_t \mu\mu \right) dx.$$

Do đó (3.35) được viết thành

$$\int_0^s \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} - \frac{1}{2}B[\mu(t), \mu(t); t]\Big) dt = -\int_0^s \big(C[u(t), \mu(t); t] + D[\mu(t), \mu(t); t]\big) dt.$$

Từ kết quả $u(0) = 0, \mu(s) = 0$, ta có

$$\frac{1}{2}\|u(s)\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, 0)\frac{\partial \mu(0)}{\partial x_i}\frac{\partial \mu(0)}{\partial x_j} dx$$

$$= -\int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i(x,0) \frac{\partial \mu(0)}{\partial x_i} \mu(0) + c(x,0)\mu(0)\mu(0) \Big) dx$$

$$- \int\limits_{0}^{s} \big(C[u(t), \mu(t); t] + D[\mu(t), \mu(t); t] \big) dt. \qquad (3.36)$$

Áp dụng bất đẳng thức Young và bất đẳng thức Cauchy đối với các hạng tử bên vế phải của (3.36), ta thu được

$$\|u(s)\|^2_{L_2(\Omega)} + (\mu_0 - \varepsilon)\|\mu(0)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)}$$

$$\leq C\Big(\int\limits_{0}^{s} \big(\|\mu(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)} + \|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \big) dt + \|\mu(0)\|^2_{L_2(\Omega)} \Big).$$

Chọn $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ sao cho $\varepsilon < \mu_0$, ta thu được

$$\|u(s)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\mu(0)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)}$$

$$\leq C\Big(\int\limits_{0}^{s} \big(\|\mu(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)} + \|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \big) dt + \|\mu(0)\|^2_{L_2(\Omega)} \Big). \quad (3.37)$$

Bây giờ ta đặt

$$\omega(t) = \int\limits_{0}^{t} u(\tau) d\tau, \text{với } t \in [0, T].$$

Nhận thấy $\mu(0) = \omega(s)$ và $\mu(t) = \omega(s) - \omega(t)$. Do đó (3.37) đưa đến

$$\|u(s)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\omega(s)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)}$$

$$\leq C\Big(\int\limits_{0}^{s} \big(\|\omega(s) - \omega(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)} + \|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \big) dt + \|\omega(s)\|^2_{L_2(\Omega)} \Big). \quad (3.38)$$

Từ đánh giá $\|\omega(s) - \omega(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)} \leq 2\|\omega(s)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)} + 2\|\omega(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)}$ và

$$\|\omega(s)\|^2_{L_2(\Omega)} \leq C \int\limits_{0}^{s} \|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} dt,$$

bất đẳng thức (3.38) đưa đến

$$\|u(s)\|^2_{L_2(\Omega)} + (1 - 2C_1 s)\|\omega(s)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)} \leq C_1 \int_0^s \big(\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\omega(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)}\big)dt.$$

Chọn $T_1 > 0$ đủ nhỏ sao cho $1 - 2T_1C_1 \geq \dfrac{1}{2}$. Khi đó với mỗi s thỏa mãn $0 \leq s \leq T_1$ thì

$$\|u(s)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\omega(s)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)} \leq C \int_0^s \big(\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\omega(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)}\big)dt.$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall, ta thu được $u(t) \equiv 0$ trên $[0, T_1]$. Lập luận tương tự như trên đối với các đoạn $[T_1, 2T_1], [2T_1, 3T_1], \cdots$ Khi đó ta có $u(t) \equiv 0$ trên $[0, T]$. □

b. Tính trơn của nghiệm yếu theo biến thời gian của bài toán tuyến tính

Sử dụng phương pháp quy nạp, ta chứng minh tính trơn theo biến thời gian của nghiệm yếu của bài toán (3.4)−(3.6).

Định lý 3.2. *Cho $k \in \mathbb{N}, h_{t^j} \in C\big([0,T]; L_2(\Omega)\big),\ j = 0, 1, \cdots, k$. Khi đó bài toán (3.7)−(3.9) có nghiệm yếu u thỏa mãn*

$$u_{t^j} \in C\big(0, T; \mathring{H}^1(\Omega)\big),\ j = 0, 1, \cdots, k, \tag{3.39}$$

$$\sum_{j=0}^{k} \|u_{t^j}(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)} + \|u_{t^{k+1}}\|^2_{L_2(\Omega)} \leq C \sum_{j=0}^{k} \int_0^t \|h_{t^j}(s)\|^2_{L_2(\Omega)} ds \tag{3.40}$$

với $\forall t \in [0, T]$.

Chứng minh. Từ (3.23), cho $N \to \infty$, ta có

$$\|u(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)} + \|u_t(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \leq C \int_0^t \|h(s)\|^2_{L_2(\Omega)} ds,\ \forall t \in (0, T]. \tag{3.41}$$

Do đó

$$\max_{t\in[0,T]} \big(\|u(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)} + \|u_t(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\big) \leq C \int_0^T \|h(s)\|^2_{L_2(\Omega)} ds. \tag{3.42}$$

Điều này đưa đến $u \in C\big(0,T;\mathring{H}^1(\Omega)\big)$. Như vậy (3.39) và (3.40) đúng với $k=0$. Tiếp tục, ta chứng minh định lý đúng với $k=1$. Từ (3.13), lấy đạo hàm theo biến t, ta có

$$\big(u^N_{ttt}(t),\omega_k\big)+B[u^N_t(t),\omega_k;t]=\big(h_t(\cdot,t),\omega_k\big)-B_t[u^N(t),\omega_k;t], \quad (3.43)$$

ở đây

$$B_t[u,v;t]=\int\limits_\Omega\Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ijt}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^n b_{it}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}v+c_t(x,t)uv\Big)dx.$$

Nhân cả hai vế của (3.43) với $g"_k(t)$, $t\in[0,T]$, lấy tổng theo $k=1,2,\cdots,N$ và đặt $\widetilde{u}^N=u^N_t$, ta thu được

$$(\widetilde{u}^N_{tt},\widetilde{u}^N_t)+B[\widetilde{u}^N,\widetilde{u}^N_t;t]=\big(h_t(x,t),\widetilde{u}^N_t\big)-B_t[u^N,\widetilde{u}^N_t;t].$$

Đặt
$$\widetilde{B}_1=\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\frac{\partial\widetilde{u}^N}{\partial x_i}\frac{\partial\widetilde{u}^N_t}{\partial x_j}dx$$
$$\widetilde{B}_2=\int\limits_\Omega\Big(\sum_{i=1}^n b_i(x,t)\frac{\partial\widetilde{u}^N}{\partial x_i}\widetilde{u}^N_t+c(x,t)\widetilde{u}^N\widetilde{u}^N_t\Big)dx,$$

đẳng thức trên trở thành

$$(\widetilde{u}^N_{tt},\widetilde{u}^N_t)+\widetilde{B}_1=\big(h_t(x,t),\widetilde{u}^N_t\big)-\widetilde{B}_2-B_t[u^N,\widetilde{u}^N_t;t]. \quad (3.44)$$

Ta nhận thấy

$$(\widetilde{u}^N_{tt},\widetilde{u}^N_t)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|\widetilde{u}^N_t(t)\|_{L_2(\Omega)}\big). \quad (3.45)$$
$$\widetilde{B}_1=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(A[\widetilde{u}^N,\widetilde{u}^N;t]\big)-\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n a_{ijt}(x,t)\frac{\partial\widetilde{u}^N}{\partial x_i}\frac{\partial\widetilde{u}^N}{\partial x_j}dx,$$

ở đây $A[u,v;t]=\int\limits_\Omega\sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx$. Ta có

$$\widetilde{B}_1\geq\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(A[\widetilde{u}^N,\widetilde{u}^N;t]\big)-C\|\widetilde{u}^N(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)}. \quad (3.46)$$

Hơn nữa,

$$|\big(h_t(x,t),\widetilde{u}^N_t\big)|\leq C\big(\|h_t(t)\|^2_{L_2(\Omega)}+\|\widetilde{u}^N_t(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\big). \quad (3.47)$$
$$|\widetilde{B}_2|\leq C\big(\|\widetilde{u}^N(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)}+\|\widetilde{u}^N_t(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\big). \quad (3.48)$$

Quan sát thấy

$$B_t[u^N, \widetilde{u}_t^N; t] = \frac{d}{dt} B_t[u^N, \widetilde{u}^N; t] - B_{tt}[u^N, \widetilde{u}^N; t] - B_t[\widetilde{u}^N, \widetilde{u}^N; t], \quad (3.49)$$

ở đó

$$B_{tt}[u, v; t] = \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ijtt}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_{itt}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} v + c_{tt}(x,t) uv \Big) dx$$

Từ (3.44)-(3.49), ta thu được

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\big(\|\widetilde{u}_t^N(t)\|_{L_2(\Omega)} + A[\widetilde{u}^N(t), \widetilde{u}^N(t); t]\big) \\ &\qquad \le C\big(\|h_t(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\widetilde{u}_t^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\widetilde{u}^N(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)}\big) \\ &\qquad\quad - \frac{d}{dt} B_t[u^N, \widetilde{u}^N; t] + B_{tt}[u^N, \widetilde{u}^N; t] + B_t[\widetilde{u}^N, \widetilde{u}^N; t]. \end{aligned}$$

Lấy tích phân trên $[0, t],\ t \in [0, T]$, ta thu được

$$\begin{aligned} &\|\widetilde{u}_t^N(t)\|_{L_2(\Omega)} + A[\widetilde{u}^N, \widetilde{u}^N; t] \\ &\le C \int_0^t \big(\|h_t(s)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\widetilde{u}_t^N(s)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\widetilde{u}^N(s)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)}\big) ds \\ &\quad - B_t[u^N, \widetilde{u}^N; t] + \int_0^t \Big(B_{tt}[u^N, \widetilde{u}^N; s] + B_t[\widetilde{u}^N, \widetilde{u}^N; s]\Big) ds. \qquad (3.50) \end{aligned}$$

Áp dụng (3.2), ta có $A[\widetilde{u}^N(t), \widetilde{u}^N(t); t] \ge \mu_0 \|\widetilde{u}^N(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)}$. Sử dụng bất đẳng thức Young, ta có $\big|B_t[u^N, \widetilde{u}^N; t]\big| \le C(\varepsilon)\|u^N(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)} + \varepsilon \|\widetilde{u}^N(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)}$. Thêm nữa,

$$\begin{aligned} &\Big| \int_0^t \big(B_{tt}[u^N, \widetilde{u}^N; s] + B_t[\widetilde{u}^N, \widetilde{u}^N; s]\big) ds \Big| \\ &\qquad \le C \int_0^t \big(\|u^N(s)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)} + \|\widetilde{u}^N(s)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)}\big) ds \end{aligned}$$

$$\leq C_T \int_0^t \|h(s)\|^2_{L_2(\Omega)} ds + C \int_0^t \|\widetilde{u}^N(s)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)} ds.$$

Do đó (3.50) đưa đến

$$\|\widetilde{u}_t^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + (\mu_0 - \varepsilon)\|\widetilde{u}^N(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)}$$
$$\leq C \int_0^t \big(\|h(s)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|h_t(s)\|^2_{L_2(\Omega)}\big) ds$$
$$+ C \int_0^t \big(\|\widetilde{u}_t^N(s)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\widetilde{u}^N(s)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)}\big) ds.$$

Ta chọn $\varepsilon > 0$ sao cho $\varepsilon < \mu_0$. Khi đó ta thu được đánh giá sau

$$\|\widetilde{u}_t^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\widetilde{u}^N(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)} \leq C_1 \int_0^t \big(\|h(s)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|h_t(s)\|^2_{L_2(\Omega)}\big) ds$$
$$+ C_2 \int_0^t \big(\|\widetilde{u}_t^N(s)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\widetilde{u}^N(s)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)}\big) ds. \quad (3.51)$$

Đặt $F(t) = \|\widetilde{u}_t^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\widetilde{u}^N(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)}$, $G(t) = C_1 \int_0^t \big(\|h(s)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|h_t(s)\|^2_{L_2(\Omega)}\big) ds$. Khi đó (3.51) được viết thành $F(t) \leq G(t) + C_2 \int_0^t F(s) ds$. Rõ ràng $G(t)$ và $G'(t)$ khả tích trên $[0, t]$, $\forall t \in [0, T], G(0) = 0$. Áp dụng Bổ đề 1.3, ta thu được $F(t) \leq \int_0^t e^{C_2(t-s)} G'(s) ds, \quad \forall t \in [0, T]$. Tức là

$$\|\widetilde{u}_t^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\widetilde{u}^N(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)} \leq C \int_0^t \big(\|h(s)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|h_t(s)\|^2_{L_2(\Omega)}\big) ds$$

đúng với mọi $t \in [0, T]$. Cho $N \to \infty$, ta có

$$\|\widetilde{u}_t(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\widetilde{u}(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)} \leq C \int_0^t \big(\|h(s)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|h_t(s)\|^2_{L_2(\Omega)}\big) ds.$$

Thay $\widetilde{u}^N = u_t^N$, ta có

$$\|u_{tt}(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u_t(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)} \leq C\int_0^t \big(\|h(s)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|h_t(s)\|^2_{L_2(\Omega)}\big)ds. \quad (3.52)$$

Vì vậy

$$\max_{0\leq t\leq T}\big(\|u_{tt}(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u_t(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)}\big) \leq C\int_0^T \big(\|h(s)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|h_t(s)\|^2_{L_2(\Omega)}\big)ds.$$

Suy ra $u_t \in C\big(0,T;\mathring{H}^1(\Omega)\big)$. Kết hợp (3.41) và (3.52) ta có

$$\sum_{j=0}^{1}\|u_t(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)} + \|u_{tt}\|^2_{L_2(\Omega)} \leq C\sum_{j=0}^{1}\int_0^t \|h_{t^j}(s)\|^2_{L_2(\Omega)}ds.$$

Điều này cho thấy Định lý đúng với $k = 1$.

Giả sử (3.39) và (3.40) đúng với $k-1, k \geq 1$. Ta sẽ chứng minh nó đúng với k. Từ (3.13), lấy đạo hàm cấp k theo biến t cả hai vế, ta có

$$\big(u^N_{t^{k+2}}, \omega_l\big) + B[u_{t^k}, \omega_l; t] = \big(h_{t^k}, \omega_l\big) - \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j} B_{t^{k-j}}[u_{t^j}, \omega_l; t]. \quad (3.53)$$

Nhân cả hai vế của (3.53) với $g_l^{(k+1)}(t)$, lấy tổng theo $l = 1, 2, \cdots, N$, ta được

$$\big(u^N_{t^{k+2}}, u^N_{t^{k+1}}\big) + B[u^N_{t^k}, u^N_{t^{k+1}}; t] = \big(h_{t^k}, u^N_{t^{k+1}}\big) + \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j} B_{t^{k-j}}[u^N_{t^j}, u^N_{t^{k+1}}; t]. \quad (3.54)$$

Lập luận tương tự như trên và sử dụng giả thiết quy nạp, ta thu được $u_{t^j} \in C\big(0,T;\mathring{H}^1(\Omega)\big),\ j = 0, 1, \cdots, k$ và

$$\sum_{j=0}^{k}\|u_{t^j}(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)} + \|u_{t^k}\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \sum_{j=0}^{k}\int_0^t \|h_{t^j}(s)\|^2_{L_2(\Omega)}ds \quad (3.55)$$

với $\forall t \in (0,T]$. Định lý được chứng minh. $\square$

Bây giờ ta định nghĩa không gian $\mathscr{H}_a^k$ bao gồm tất cả các hàm u sao cho $u \in \bigcap_{j=0}^{k} C^{(j)}\big(0,T; H_a^{k-j}(\Omega)\big)$. Với mỗi $u \in \mathscr{H}_a^k$ và với mỗi $t \in [0,T]$, ta định nghĩa các chuẩn

$$\|u(t)\|^2_{\mathscr{H}_a^k(\Omega)} = \sum_{j=0}^{k} \|u_{t^j}(t)\|^2_{H_a^{k-j}(\Omega)} \text{ và } \|u\|_{\mathscr{H}_a^k} = \sum_{j=0}^{k} \|u_{t^j}\|_{C\left([0,T]; H_a^{k-j}(\Omega)\right)}.$$

Áp dụng Định lý 1.10, tính chính quy của nghiệm yếu thuộc không gian Sobolev có trọng của bài toán (3.7)−(3.9) được khẳng định như sau.

Định lý 3.3. *Cho $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ và giả thiết rằng $h_{t^j} \in C\big(0,T; H_a^{k-j}(\Omega)\big)$, $0 \leq j \leq k-1$, $h_{t^j}(x,0) = 0, 0 \leq j \leq k-2$ và $k+1-a < \dfrac{\pi}{\omega}$, $a \in [0,1]$. Khi đó nghiệm yếu u của bài toán (3.7)−(3.9) thuộc $\mathscr{H}_a^k$ và*

$$\|u(t)\|^2_{\mathscr{H}_a^k(\Omega)} \leq C \int_0^t \|h(s)\|^2_{\mathscr{H}_a^{k-1}(\Omega)} ds, \ t \in (0,T]. \tag{3.56}$$

Chứng minh. Ta chứng minh Định lý bằng phương pháp quy nạp. Thật vậy, từ (3.7), ta có

$$L(x,t,\partial)u = h(x,t) - u_{tt}(t). \tag{3.57}$$

Từ (3.39), ta có $u_{tt} \in \mathring{H}^1(\Omega) \hookrightarrow H_a^0(\Omega)$ và theo giả thiết $h(t) \in H_a^0(\Omega)$, do đó nếu đặt $h_1(x,t) = h(x,t) - u_{tt}(t)$, thì $f_1(x,t) \in H_a^0(\Omega)$, $t \in [0,T]$. Áp dụng Định lý 1.10, ta có $u(t) \in H_a^2(\Omega)$, $\forall t \in [0,T]$ và

$$\|u(t)\|_{H_a^2(\Omega)} \leq C\big(\|h_1(t)\|_{H_a^0(\Omega)} + \|u(t)\|_{L_2(\Omega)}\big).$$

Do đó $\|u(t)\|^2_{H_a^2(\Omega)} \leq C\big(\|h(t)\|^2_{H_a^0(\Omega)} + \|u_{tt}(t)\|^2_{H_a^0(\Omega)} + \|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\big)$. Ta nhận thấy

$$\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \leq C\|u(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)} \leq C \int_0^t \|h(s)\|^2_{H_a^0(\Omega)} ds.$$

$$\|u_{tt}(t)\|^2_{H_a^0(\Omega)} \leq C\|u_{tt}(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \leq C \int_0^t \|h(s)\|^2_{\mathscr{H}_a^1(\Omega)} ds.$$

$$\|h(t)\|^2_{H^0_a(\Omega)} \le C\Big(\|h(0)\|^2_{H^0_a(\Omega)} + \int\limits_0^t \|h_t(s)\|^2_{H^0_a(\Omega)} ds\Big)$$
$$\le C \int\limits_0^t \|h_t(s)\|^2_{\mathscr{H}^1_a(\Omega)} ds,$$

điều này đúng với mọi $t \in [0, T]$. Do đó

$$\|u(t)\|^2_{H^2(\Omega)} \le C \int\limits_0^t \|f(s)\|^2_{\mathscr{H}^1_a(\Omega)} ds. \tag{3.58}$$

Áp dụng bất đẳng thức Hardy (xem [7]), ta có

$$\|u_t(t)\|^2_{H^1_a(\Omega)} = \int\limits_\Omega \big(r^{2(a-1)}|u_t(t)|^2 + r^{2a}|Du_t(t)|^2 + |u_t(t)|^2\big)dx$$
$$\le C\|u_t(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)} \le C \int\limits_0^t \|h(s)\|^2_{\mathscr{H}^1_a(\Omega)} ds. \tag{3.59}$$

Theo chứng minh trên, ta có

$$\|u_{tt}(t)\|^2_{H^0_a(\Omega)} \le C \int\limits_0^t \|h(s)\|^2_{\mathscr{H}^1_a(\Omega)} ds. \tag{3.60}$$

Từ (3.58), (3.59) và (3.60) ta có

$$\|u(t)\|^2_{\mathscr{H}^2_a(\Omega)} \le C \int\limits_0^t \|h(s)\|^2_{\mathscr{H}^1_a(\Omega)} ds, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{3.61}$$

Ở đây C là hằng số độc lập với u và h. Do đó Định lý đúng với $k = 2$.

Giả sử rằng Định lý đúng với $k-1,\ k \ge 2$, tức là nghiệm yếu u của bài toán (3.7)−(3.9) thuộc $\mathscr{H}^{k-1}_a$ và

$$\|u(t)\|^2_{\mathscr{H}^{k-1}_a(\Omega)} \le C \int\limits_0^t \|h(s)\|^2_{\mathscr{H}^{k-2}_a(\Omega)} ds.$$

Ta chứng minh định lý đúng với k. Thật vậy, ta có

$$\|u(t)\|^2_{\mathscr{H}^k(\Omega)} = \|u(t)\|^2_{H^k(\Omega)} + \|u_t(t)\|^2_{\mathscr{H}_a^{k-1}(\Omega)}. \tag{3.62}$$

Từ phương trình (3.57), bởi giả thiết $h(t) \in H_a^{k-1}(\Omega) \hookrightarrow H_a^{k-2}(\Omega)$ và bởi khẳng định trong chứng minh ở phần trên, ta thấy $u_{tt} \in H_a^{k-2}(\Omega)$, nên $h_1(t) = h(t) - u_{tt}(t) \in H_a^{k-2}(\Omega)$. Do đó, áp dụng Định lý 1.10, $u(t) \in H_a^k(\Omega)$ và lập luận tương tự như trên, ta nhận được

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|^2_{H_a^k(\Omega)} &\le \big(\|h_1(t)\|^2_{H_a^{k-2}(\Omega)} + \|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\big)\\
&\le C\big(|h(t)\|^2_{H_a^{k-2}(\Omega)} + \|u_{tt}(t)\|^2_{H_a^{k-2}(\Omega)} + \|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\big)\\
&\le C\Big(\|h(t)\|^2_{H_a^{k-2}(\Omega)} + \int\limits_0^t \|h(s)\|^2_{\mathscr{H}_a^{k-1}(\Omega)}\Big). \qquad (3.63)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|h(t)\|^2_{H_a^{k-2}(\Omega)} &\le C\Big(\|h(0)\|^2_{H_a^{k-2}(\Omega)} + \int\limits_0^t \|h_t(s)\|^2_{H_a^{k-2}(\Omega)} ds\Big)\\
&\le C\int\limits_0^t \|h_t(s)\|^2_{\mathscr{H}_a^{k-1}(\Omega)} ds,\ \forall t \in [0,T]. \qquad (3.64)
\end{aligned}$$

Kết hợp (3.63) và (3.64), ta thu được

$$\|u(t)\|^2_{H_a^k(\Omega)} \le C\int\limits_0^t \|h(s)\|^2_{\mathscr{H}_a^{k-1}(\Omega)} ds, \quad \forall\, t \in [0,T]. \tag{3.65}$$

Tiếp theo, ta lấy đạo hàm theo biến t cả hai vế của (3.7), sau đó đặt $\widetilde{u} = u_t, \widetilde{h}(x,t) = h_t(x,t) - u_{ttt} - L_t(x,t,\partial)u$. Khi đó ta kiểm tra được rằng $\widetilde{u}$ là nghiệm của bài toán (3.7)−(3.9). Bởi giả thiết quy nạp, ta thu được $\widetilde{u} = u_t \in \mathscr{H}_a^{k-1}$. Thêm nữa, với $\forall\, t \in [0,T]$

$$\|u_t(t)\|^2_{\mathscr{H}_a^{k-1}(\Omega)} \le C\int\limits_0^t \|\widetilde{h}(s)\|^2_{\mathscr{H}_a^{k-2}(\Omega)} ds \le \int\limits_0^t \|h(s)\|^2_{\mathscr{H}_a^{k-1}(\Omega)} ds \tag{3.66}$$

Kết hợp (3.62), (3.65) và (3.66), ta thu được $u \in \mathscr{H}_a^k$ và

$$\|u(t)\|^2_{\mathscr{H}_a^k(\Omega)} \le C\int\limits_0^t \|h(s)\|^2_{\mathscr{H}_a^{k-1}(\Omega)} ds.$$

Định lý được chứng minh. □

Bây giờ ta khẳng định sự tồn tại duy nhất và tính chính quy nghiệm yếu trên $[0,T]$ của bài toán nửa tuyến tính.

3.1.3. Bài toán nửa tuyến tính

a. Tính duy nhất nghiệm yếu của bài toán nửa tuyến tính

Trong mục này, ta đưa ra bổ đề bổ trợ, khẳng định sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu trên $[0,T](0 < T \leq \infty)$ của bài toán (3.4)−(3.6). Hơn nữa, ta xác định tính chính quy của nghiệm theo biến thời gian.

Bổ đề 3.1. *Cho $v_i \in C^{(k_i)}\big(0,T;H_a^{l-k_i}(\Omega)\big)$, $i = 1,\cdots,m$, ở đây l, k_i là $m+1$ số nguyên dương thỏa mãn $l \geq \dfrac{n}{2} + a + 1$, $0 \leq k_1 \leq l-1$, $k_i \leq l - 1 - \left[\dfrac{n}{2}\right]$, $i = 2,\cdots,m$. Giả thiết rằng các đa chỉ số α_i $(i = 1,\cdots,m)$ thỏa mãn $|\alpha_1| \leq l - k_1 - 1, |\alpha_i| \leq l - k_i - 1 - \left[\frac{n}{2}\right]$, và $\sum\limits_{i=1}^{m} |\alpha_i| \leq l - \sum\limits_{i=1}^{m} k_i$. Khi đó*

$$\|r^a D^{\nu_1} v_1 \cdots D^{\nu_m} v_m\|_{L_2(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^{m} \|v_i\|_{H_a^{l-k_i}(\Omega)}. \tag{3.67}$$

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\begin{aligned}
&\|r^a D^{\alpha_1} v_1 \cdots D^{\alpha_m} v_m\|_{L_2(\Omega)} \\
&\leq \|r^{(a+|\alpha_1|-l+1+k_1)} D^{\alpha_1} v_1\|_{L_{2p_1}(\Omega)} \cdot \|r^{(|\alpha_2|+k_2-1)} D^{\alpha_2} v_2\|_{L_{2p_2}(\Omega)} \\
&\qquad \cdot \|r^{(|\alpha_3|+k_3)} D^{\alpha_3} v_3\|_{L_{2p_3}(\Omega)} \cdots \|r^{(|\alpha_m|+k_m)} D^{\alpha_m} v_m\|_{L_{2p_m}(\Omega)},
\end{aligned} \tag{3.68}$$

ở đây $1 < p_1 < \dfrac{n}{n-2}$, $1 < p_i < \infty$, $(i = 2,3,\cdots,m)$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{1}{p_i} = 1$. Quan sát vế phải của (3.68), ta có kết quả đánh giá sau:

$$\begin{aligned}
&\|r^{(a+|\alpha_1|-l+1+k_1)} D^{\alpha_1} v_1\|_{L_{2p_1}(\Omega)} = \Big(\int_\Omega r^{2p_1(a+|\alpha_1|-l+1+k_1)} |D^{\alpha_1} v_1|^{2p_1} dx\Big)^{\frac{1}{2p_1}} \\
&\leq C\Big[\int_\Omega \Big(\sum_{0\leq|\alpha_1|\leq l-1-k_1} r^{2p_1(a+|\alpha_1|-l+1+k_1)} |D^{\alpha_1} v_1|^{2p_1} + |v_1|^{2p_1}\Big) dx\Big]^{\frac{1}{2p_1}} \\
&= \|v_1\|_{V_a^{l-1-k_1,\,2p_1}(\Omega)};
\end{aligned}$$

Bởi $r = r(x) > 0$ là bị chặn và $l \geq \dfrac{n}{2} + a + 1$, nên ta có

$$\|r^{|\alpha_2|+k_2-1} D^{\alpha_2} v_2\|_{L_{2p_2}(\Omega)} = \Big(\int\limits_{\Omega} r^{2p_2(|\alpha_2|+k_2-1)} |D^{\alpha_2} v_2|^{2p_2} dx \Big)^{\frac{1}{2p_2}}$$

$$\leq C \Big(\int\limits_{\Omega} r^{2p_2(a+|\alpha_2|-l+k_2+1+[\frac{n}{2}])} |D^{\alpha_2} v_2|^{2p_2} dx \Big)^{\frac{1}{2p_2}}$$

$$\leq C \Big[\int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{0 \leq |\alpha_2| \leq l-k_2-1-[\frac{n}{2}]} r^{2p_2(a+|\alpha_2|-l+k_2+1+[\frac{n}{2}])} |D^{\alpha_2} v_2|^{2p_2} + |v_2|^{2p_2} \Big) dx \Big]^{\frac{1}{2p_2}}$$

$$= C \|v_2\|_{V_a^{l-k_2-1-[\frac{n}{2}],\, 2p_2}(\Omega)};$$

$$\|r^{|\alpha_i|+k_i} D^{\alpha_i} v_i\|_{L_{2p_i}(\Omega)} = \Big(\int\limits_{\Omega} r^{2p_i(|\alpha_i|+k_i)} |D^{\alpha_i} v_i|^{2p_i} dx \Big)^{\frac{1}{2p_i}}$$

$$\leq C \Big(\int\limits_{\Omega} r^{2p_i(a-l+|\alpha_i|+k_i+1+[\frac{n}{2}])} |D^{\alpha_i} v_i|^{2p_i} dx \Big)^{\frac{1}{2p_i}}$$

$$\leq C \Big[\int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{0 \leq |\alpha_i| \leq l-k_i-1-[\frac{n}{2}]} r^{2p_i(a+|\alpha_i|-l+k_i+1+[\frac{n}{2}])} |D^{\alpha_i} v_i|^{2p_i} + |v_i|^{2p_i} \Big) dx \Big]^{\frac{1}{2p_i}}$$

$$= C \|v_i\|_{V_a^{l-k_i-1-[\frac{n}{2}],\, 2p_i}(\Omega)}, \quad i = 3, 4, \cdots, m.$$

Để hoàn tất chứng minh của Định lý, ta còn phải chứng minh

$H_a^{l-k_1}(\Omega) \hookrightarrow V_a^{l-k_1-1,\, 2p_1}(\Omega), H_a^{l-k_i}(\Omega) \hookrightarrow V_a^{l-k_i-1-[\frac{n}{2}],\, 2p_i}(\Omega),\ i = 2, \cdots, m.$

Áp dụng Bổ đề 1.7, ta có $H_\delta^{l-k_1}(\Omega) = V_\delta^{l-k_1,2}(\Omega) \hookrightarrow V_a^{l-k_1-1,\, 2p_1}(\Omega)$. Do $r = r(x) > 0$ là bị chặn, nên với mỗi $u \in H_\delta^{l-k_1}(\Omega)$,

$$\|u\|_{H_\delta^{l-k_1}(\Omega)} = \Big[\int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq l-k_1} r^{2(\delta+|\alpha|-l+k_1)} |D^\alpha u|^2 + |u|^2 \Big) dx \Big]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \Big[\int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq l-k_1} r^{2(\delta-a)} r^{2(a+|\alpha|-l+k_1)} |D^\alpha u|^2 + |u|^2 \Big) dx \Big]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C \Big[\int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq l-k_1} r^{2(a+|\alpha|-l+k_1)} |D^\alpha u|^2 + |u|^2 \Big) dx \Big]^{\frac{1}{2}}.$$

Tức là $\|u\|_{H_\delta^{l-k_1}(\Omega)} \leq C \|u\|_{H_a^{l-k_1}(\Omega)}$. Do đó $H_a^{l-k_1}(\Omega) \hookrightarrow H_\delta^{l-k_1}(\Omega)$. Ta thu được $H_a^{l-k_1}(\Omega) \hookrightarrow V_a^{l-k_1-1,\, 2p_1}(\Omega)$. Áp dụng Bổ đề 1.7 thêm một lần

nữa, ta có $H_\delta^{l-k_i}(\Omega) = V_\delta^{l-k_i,2}(\Omega) \hookrightarrow V_a^{l-k_i-1-[\frac{n}{2}],\,2p_i}(\Omega),\ i = 2,\cdots,m$. Chứng minh tương tự như trên, ta thu được $H_a^{l-k_i}(\Omega) \hookrightarrow H_\delta^{l-k_i}(\Omega)$. Do đó $H_a^{l-k_i}(\Omega) \hookrightarrow V_a^{l-k_i-1-[\frac{n}{2}],\,2p_i}(\Omega),\ i = 2,\cdots,m$. □

Ta xét bài toán (3.4)−(3.6) với lớp các hàm f được xác định như sau: Ta nói rằng hàm $f(x,t,v_1,\cdots,v_{n+1})$ thuộc lớp $C^{(k),1}(\overline{Q}_T \times \mathbb{R}^{n+1})$ nếu $f \in C^{(k)}(\overline{Q}_T \times \mathbb{R}^{n+1})$ và $D^\alpha f(x,t,\cdot)$ là hàm liên tục Lipschitz địa phương theo $n+1$ biến $v_1,\cdots,v_{n+1}$, với mỗi $(x,t) \in \overline{Q}_T$, $|\alpha| \le k$. Cho $f \in C^{(k),1}(\overline{Q}_T \times \mathbb{R}^{n+1})$ và với mỗi hằng số $b \ge 0$, ta kí hiệu

$$M(b) = \max_{|\alpha|\le k} \sup_{(x,t)\in Q_T} \sup_{|v_i|\le Cb} |D^\alpha f(x,t,v_1,\cdots,v_{n+1})|,$$

ở đây C là hằng số dương đã cho.

Bổ đề 3.2. *Cho $k \ge a + \dfrac{n}{2}$, $f \in C^{(k),1}(\overline{Q}_T \times \mathbb{R}^{n+1})$ và cho các hàm $u_1, u_2 \in \mathscr{H}_a^{k+1}$ thỏa mãn bất đẳng thức*

$$\max_{t\in[0,T],i\in\{1,2\}} \|u_i(t)\|_{\mathscr{H}_a^{k+1}} \le b, \tag{3.69}$$

với $b \ge 0$ là hằng số. Đặt $F_i(x,t) = f(x,t,u_i,Du_i)$, $i = 1,2$. Khi đó

(i) $F_i \in \mathscr{H}_a^k$, $i = 1,2$ và tồn tại hằng số dương C sao cho với mỗi $t \in (0,T)$, bất đẳng thức sau thỏa mãn

$$\|F_i(t)\|_{\mathscr{H}_a^k} \le CM(b)\left(1 + \|u_i(t)\|^k_{\mathscr{H}_a^{k+1}}\right),\ i = 1,2; \tag{3.70}$$

(ii) Tồn tại hằng số $K(b) > 0$ sao cho với mỗi $t \in (0,T)$, ta có

$$\|F_1(t) - F_2(t)\|_{\mathscr{H}_a^k} \le K(b)\,\|u_1(t) - u_2(t)\|_{\mathscr{H}_a^{k+1}} \tag{3.71}$$

Chứng minh. (i) Từ giả thiết $k \ge \dfrac{n}{2} + a$, áp dụng Bổ đề 1.6 cùng với giả thiết (3.69), luôn tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho với $i = 1,2$, ta có $|u_i(x,t)| \le C\|u_i(t)\|_{H_a^k(\Omega)} \le Cb$, $(x,t) \in Q_T$ và

$$|Du_i(x,t)| \le C\|Du_i(t)\|_{H_a^k(\Omega)} \le C\|u_i(t)\|_{H_a^{k+1}(\Omega)} \le Cb,\ (x,t) \in Q_T.$$

Với $i = 1,2$, ta có

$$\|F_i(t)\|_{\mathscr{H}_a^k} = \sum_{j=0}^{k} \|F_{it^j}(t)\|_{C\left(0,T;H^{k-j}(\Omega)\right)} = \sum_{j=0}^{k} \max_{0\le t\le T} \|F_{it^j}(t)\|_{H^{k-j}(\Omega)}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \max_{0\le t\le T} \Big[\int_{\Omega} \Big(\sum_{|\alpha|\le k-j} r^{2(a+|\alpha|-(k-j))} |D^{\alpha} F_{it^j}(t)|^2 + |F_i(t)|^2 \Big) dx \Big]^{\frac{1}{2}}.$$

Quan sát biểu thức trên, ta viết các đạo hàm của F_i như là đạo hàm của hàm hợp. Bởi $f \in C^{(k),1}(\overline{Q}_T \times \mathbb{R}^{n+1})$, suy ra rằng F_i có đạo hàm suy rộng tới cấp k. Ngoài ra, theo định nghĩa của $M(b)$ và áp dụng Bổ đề 3.1 ta thu được đánh giá (3.70).

(ii) Ta có

$$\|F_1(t) - F_2(t)\|_{\mathscr{H}_a^k} = \sum_{j=0}^{k} \|F_{1t^j}(t) - F_{2t^j}(t)\|_{C\left(0,T;H^{k-j}(\Omega)\right)}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \max_{0\le t\le T} \Big[\int_{\Omega} \Big(r^{2(a+|\alpha-(k-j))} |D^{\alpha}(F_{1t^j} - F_{2t^j})(t)|^2 + |F_1(t) - F_2(t)|^2 \Big) dx \Big]^{\frac{1}{2}}.$$

Do $f \in C^{(k),1}(\overline{Q}_T \times \mathbb{R}^{n+1})$ nên $D^{\alpha} f(x,t,\cdot)$ là hàm Lipschitz địa phương theo $n+1$ biến $v_1, \cdots, v_{n+1}$ với mỗi $(x,t) \in \overline{Q}_T, |\alpha| \le k$. Khi đó áp dụng (i) và áp dụng Bổ đề 3.1, ta thu được kết quả đánh giá (3.71). □

Định lý 3.4. *Cho* $k \ge a + \dfrac{n}{2}, k+1-a < \dfrac{\pi}{\omega}$, $a \in [0,1]$ *và cho* $h \in \mathscr{H}_a^{k-1}$, $f \in C^{(k-1),1}(\overline{Q}_\tau \times \mathbb{R}^{n+1})$ *thỏa mãn* $h_{t^j}(x,0) = 0, f_{t^j}(x,0,v,v_1) = 0$, $0 \le j \le k-2$. *Khi đó bài toán (3.4)–(3.6) có duy nhất nghiệm* $u \in \mathscr{H}_a^k$ *và*

$$\|u\|_{\mathscr{H}_a^k} \le C(1 + \|h\|_{\mathscr{H}_a^{k-1}}), \tag{3.72}$$

ở đây C *là hằng số độc lập với* u.

Chứng minh. Lấy hằng số $R > 0$ và với bất kì $\tau > 0$, ta xét

$$M_\tau = \{u \in \mathscr{H}_a^k : \ u(0) = u_t(0) = 0 \text{ và } \|u(t)\|_{\mathscr{H}_a^k(\Omega)} \le R, \ \forall\, t \in (0,\tau]\}.$$

Với mỗi $u \in M_\tau$ đã được cố định, áp dụng Định lý 3.3, bài toán sau có duy nhất nghiệm $v \in \mathscr{H}_a^k$

$$\begin{cases} v_{tt} + L(x,t,\partial)v = f(x,t,u,Du) + h(x,t), & (x,t) \in Q_\tau, \\ v(x,0) = v_t(x,0) = 0, & x \in \Omega, \\ v(x,t) = 0, & (x,t) \in S_\tau. \end{cases} \tag{3.73}$$

Do đó, ta định nghĩa toán tử $\Phi: \ M_\tau \to \mathscr{H}_a^k$, xác định bởi $\Phi(u) = v$, với v là nghiệm duy nhất của bài toán (3.73) tương ứng với u. Ta sẽ chứng minh với $\tau > 0$ phù hợp, Φ là ánh xạ co thỏa mãn $\Phi(M_\tau) \subset M_\tau$. Trước hết, với $u \in M_\tau$ đã cho, nghiệm tương ứng $v = \Phi(u)$ thỏa mãn với tất cả $t \in (0, \tau]$ bất đẳng thức năng lượng (3.56), tức là

$$\|v(t)\|^2_{\mathscr{H}_a^k(\Omega)} \le C \int\limits_0^\tau \|F(s)\|^2_{\mathscr{H}_a^{k-1}(\Omega)} ds, \quad \text{với tất cả } t \in (0, \tau], \tag{3.74}$$

ở đây $F(x,t) = f(x,t,u,Du) + h(x,t)$. Áp dụng Bổ đề 3.2 ta có

$$\int\limits_0^\tau \|F(x)\|^2_{\mathscr{H}_a^{k-1}(\Omega)} ds \le \tau C\big[(1 + R^{2(k-1)})M(R) + \|h\|_{\mathscr{H}_a^{k-1}}\big].$$

Ta lựa chọn τ đủ nhỏ sao cho

$$\tau C\big[(1 + R^{2(k-1)})M(R) + \|h\|_{\mathscr{H}_a^{k-1}}\big] \le R^2.$$

Khi đó ta thu được từ (3.74) rằng $\|v(t)\|_{\mathscr{H}_a^k(\Omega)} \le R$. Điều này chứng tỏ $\Phi(M_\tau) \subset M_\tau$.

Tiếp theo, ta lấy $u_1, u_2 \in M_\tau$. Khi đó ta có các nghiệm tương ứng từ bài toán (3.73) là $v_1 = \Phi(u_1), v_2 = \Phi(u_2)$. Đặt $v = v_1 - v_2$, thì v là nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} v_{tt} + L(x,t,\partial)v = f(x,t,u_1,Du_1) - f(x,t,u_2,Du_2), & (x,t) \in Q_\tau, \\ v(x,0) = v_t(x,0) = 0, & x \in \Omega, \\ v(x,t) = 0, & (x,t) \in S_\tau. \end{cases}$$

Bởi lập luận như trên, áp dụng Bổ đề 3.2, ta thu được

$$\begin{aligned} \|\Phi(u_1) - \Phi(u_2)\|^2_{\mathscr{H}_a^k} = \|v\|^2_{\mathscr{H}_a^k(\Omega)} &\le C \int\limits_0^\tau \|F_1(s) - F_2(s)\|^2_{\mathscr{H}_a^{k-1}(\Omega)} ds \\ &\le CK(b)\tau \|u_1 - u_2\|_{\mathscr{H}_a^k} \le \delta \|u_1 - u_2\|^2_{\mathscr{H}_a^k}, \end{aligned}$$

với $\delta < 1$ được xác định từ τ đủ nhỏ. Khi đó ta thu được Φ là ánh xạ co. Áp dụng nguyên lý ánh xạ co, tồn tại duy nhất nghiệm yếu u đối với bài toán (3.4)−(3.6) xác định trên $[0, \tau]$. Định lý được chứng minh. □

Nhận xét 3.1. Trong trường hợp đặc biệt khi hạng tử phi tuyến f có dạng đơn giản hơn, đó là $f = f(x,t,u)$, Định lý 3.4 cũng thỏa mãn với $k \geq \dfrac{n}{2} + a$. Thêm nữa, Định lý 3.2 là trường hợp đặc biệt của Định lý 3.4 khi $F(x,t,u,Du) \equiv 0$ trên $[0,T]$.

b. Ví dụ

Ví dụ 3.1. Cho $p \geq 1$ là số thực đã cho. Chúng ta xét bài toán sau

$$\begin{cases} u_{tt} + L(x,t,\partial)u + \varphi(x,t)u|u|^p = h(x,t), & (x,t) \in Q_T, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, & x \in \Omega \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in S_T, \end{cases} \tag{3.75}$$

ở đây $Q_T = \Omega \times (0,T)$, Ω là miền có cạnh, $n = 3$, $T < \infty$, $\varphi \in C^1(\overline{Q}_T)$.

Dễ dàng thấy rằng $f(x,t,z) = \varphi(x,t)z|z|^p \in C^{(1),1}(\overline{Q}_t \times \mathbb{R})$, tức là f, f_t, f_{x_i}, f_z là các hàm Lipschitz liên tục địa phương theo biến z đối với mỗi $(x,t) \in \overline{Q}_T$. Cho $k = 2 \geq \dfrac{3}{2} + a$, $a \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, và cho $u_1, u_2 \in \mathscr{H}_a^2$ thỏa mãn điều kiện $\max\limits_{t\in[0,T], i\in\{1,2\}} \|u_i(t)\|_{\mathscr{H}_a^2(\Omega)} \leq b$, với $b > 0$ là hằng số đã cho. Đặt $F_i(x,t) = f(x,t,u_i)$, $i = 1,2$. Chú ý rằng

$$\begin{aligned} \|F_i(t)\|^2_{H^1_a(\Omega)} &= \int\limits_\Omega |\varphi||u_i|^2|u_i|^{2p} r^{2(a-1)} dx + \int\limits_\Omega |D\varphi||u_i|^2|u_i|^{2p} r^{2a} dx \\ &\qquad + \int\limits_\Omega (1+p)|\varphi||Du_i|^2|u_i|^{2p} r^{2a} dx \\ &\leq C\|u_i(t)\|^{2p}_{H^2_a(\Omega)} \Big(\int\limits_\Omega |\varphi||u_i|^2 r^{2(a-1)} dx + \int\limits_\Omega |D\varphi||u_i|^2 r^{2a} dx \\ &\qquad + \int\limits_\Omega (1+p)|\varphi||Du_i|^2 r^{2a} dx \Big) \\ &\leq C\|u_i(t)\|^{2p}_{H^2_a(\Omega)} \|u_i(t)\|^2_{H^1_a(\Omega)} \leq C\|u_i(t)\|^{2p}_{H^2_a(\Omega)} \|u_i(t)\|^2_{H^2_a(\Omega)}. \end{aligned}$$

Do đó

$$\|F_i(t)\|^2_{H^1_a(\Omega)} \leq Cb^p \|u_i(t)\|^2_{H^2_a(\Omega)}. \tag{3.76}$$

Ngoài ra, từ

$$\|F_{it}(t)\|^2_{H^0_a(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} |\varphi_t||u_i|^2|u_i|^{2p}r^{2a}dx + \int\limits_{\Omega}(1+p)|\varphi||u_{it}|^2|u_i|^{2p}r^{2a}dx$$
$$\leq C\|u_i(t)\|^{2p}_{H^2_a(\Omega)}\big(1+\|u_{it}\|^2_{H^1_a(\Omega)}\big),$$

ta thu được

$$\|f_{it}(t)\|_{H^0_a(\Omega)} \leq Cb^p\big(1+\|u_{it}(t)\|^2_{H^1_a(\Omega)}\big). \tag{3.77}$$

Từ (3.76) và (3.77), đưa đến $\|F_i(t)\|^2_{\mathscr{H}^1_a(\Omega)} \leq Cb^p\big(1+\|u_i(t)\|^2_{\mathscr{H}^2_a(\Omega)}\big)$. Do đó, với $k=2$, khẳng định (i) của Bổ đề 3.2 thỏa mãn. Lập luận theo cách tương tự như trên, khẳng định (ii) của Bổ đề 3.2 cũng thỏa mãn với $k=2$. Bởi lập luận tương tự như chứng minh của định lý 3.4, với giả thiết $\omega < \dfrac{\pi}{3-a}$, $a \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ thì bài toán (3.75) có duy nhất nghiệm $u \in \mathscr{H}^2_a$ và $\|u(t)\|_{\mathscr{H}^2_a} \leq C$, ở đây C là hằng số dương độc lập với u.

Tiếp theo, chúng ta xét bài toán *Klein-Gordon* [56, Mục 10.4] trong miền có cạnh Ω.

Ví dụ 3.2. Cho $q > -\lambda_1$ với $\lambda_1 > 0$ là giá trị riêng nhỏ nhất của toán tử $-\Delta$ trên $H^{-1}(\Omega)$, tức $\lambda_1 = \inf\{\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} :\ u \in \mathring{H}^1(\Omega),\ \|u\|_{L_2(\Omega)=1}\}$. Ta xét bài toán

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + qu - g(x,t,u) = 0 & (x,t) \in Q_T, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 & x \in \Omega, \\ u|_{S_T} = 0. \end{cases} \tag{3.78}$$

Khi đó nếu $\omega < \dfrac{\pi}{3-a}, a \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right], k \geq \dfrac{n}{2} + a$ và hàm $g(x,t,v)$ thuộc $C^{(k),1}(\overline{Q}_T, \mathbb{R})$, $g_{t^j}(x,0,v) = 0,\ 0 \leq j \leq k-2$ thì bài toán (3.78) có duy nhất nghiệm $u \in \mathscr{H}^k_a$ và $\|u(t)\|_{\mathscr{H}^k_a} \leq C$, ở đây C là hằng số dương độc lập với u.

3.2. Bài toán Dirichlet-Cauchy đối với phương trình hyperbolic nửa tuyến tính trong miền nón có cạnh

3.2.1. Mở đầu

Cho $\mathcal{K} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 :\ \frac{x}{|x|} \in \Omega\right\}$ là một nón bị chặn có đỉnh tại gốc tọa độ. Giả thiết rằng biên $\partial\mathcal{K}$ bao gồm đỉnh $x=0$, các cạnh (các nửa đường

thẳng) $M_1, \cdots, M_d$ xuất phát từ đỉnh, các mặt nhẵn (lớp C^∞) $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_d$ và Ω là một miền kiểu đa giác nằm trên mặt cầu đơn vị S^2 tâm tại gốc, có các đỉnh $P_k = M_k \cap S^2$ và các cạnh $\gamma_k = \Gamma_k \cap S^2, k = 1, \cdots, d$. Cho $0 < T < \infty$, đặt $\mathcal{K}_T = \mathcal{K} \times (0,T), \partial\mathcal{K}_T = \bigcup\limits_{i=1}^{d} \Gamma_i \times (0,T)$.

Ta xét toán tử vi phân L trên $\mathcal{K}_T$ được xác định bởi (3.1) với các hệ số hàm và đạo hàm của chúng bị chặn trên $\mathcal{K}_T$. Ngoài ra, ta giả thiết rằng a_{ij} $(i,j = 1, \cdots, n)$ liên tục theo $x \in \overline{\mathcal{K}}$, đều theo $t \in [0,T]$, thêm nữa $a_{ij} = a_{ji}$, $(i,j = 1, \cdots, n)$ và điều kiện (3.2) thỏa mãn. Tương ứng với toán tử vi phân ta có dạng song tuyến tính $B[u,v;t]$ trên $\mathcal{K}_T$ xác định bởi (3.3) với mọi $u, v \in \mathring{H}^1(\mathcal{K})$.

Ta xét bài toán sau:

$$u_{tt}(x,t) + L(x,t,\partial)u = f(x,t,u) + h(x,t), \quad (x,t) \in \mathcal{K}_T, \tag{3.79}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \qquad x \in \mathcal{K} \tag{3.80}$$

$$u|_{\partial\mathcal{K}_T} = 0, \tag{3.81}$$

trong đó f và h là các hàm đã cho.

Định nghĩa 3.2. Một hàm $u(x,t)$ được gọi là nghiệm yếu của bài toán (3.79)−(3.81) trên $[0,T]$ nếu $u \in L_2\big(0,T;\mathring{H}^1(\mathcal{K})\big), u_t \in L_2\big(0,T;L_2(\mathcal{K})\big)$, $u_{tt} \in L_2\big(0,T;H^{-1}(\mathcal{K})\big)$ sao cho $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$, $\forall x \in \mathcal{K}$ và đẳng thức

$$\big(u_{tt}(t), v\big) + B\big[u,v;t\big] = \big(f(t,u(t)), v\big) + \big(h(t), v\big), \tag{3.82}$$

thỏa mãn với mọi $v \in \mathring{H}^1(\mathcal{K})$ và hầu khắp $t \in [0,T]$.

3.2.2. Bài toán tuyến tính

Trong mục này, ta khẳng định sự tồn tại duy nhất, tính chính quy của nghiệm yếu trên $[0,T]$ của bài toán tuyến tính tương ứng với bài toán (3.79)−(3.81). Các khẳng định nêu ra, chúng ta lập luận tương tự như các định lý trong mục 3.1.2.

a. Sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu của bài toán tuyến tính

Khi $f(x,t,u) \equiv 0$ trên $\mathcal{K}_T$, ta có bài toán Dirichlet-Cauchy đối với phương trình hyperbolic tuyến tính cấp hai trên $\mathcal{K}_T$ sau đây:

$$u_{tt}(x,t) + L(x,t,\partial)u = h(x,t), \qquad (x,t) \in \mathcal{K}_T, \tag{3.83}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \qquad x \in \mathcal{K} \tag{3.84}$$

$$u|_{\mathcal{K}_T} = 0. \tag{3.85}$$

Hàm $u(x,t)$ được gọi là nghiệm yếu của bài toán (3.83)−(3.85) trên $[0,T]$ nếu $u \in L_2\big(0,T;H^1(\mathcal{K})\big), u_t \in L_2\big(0,T;L_2(\mathcal{K})\big)$, $u_{tt} \in L_2\big(0,T;H^{-1}(\mathcal{K})\big)$ sao cho $u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0$ và đẳng thức

$$\langle u_{tt}(t), v\rangle + B[u(t), v; t] = \big(h(t), v\big) \tag{3.86}$$

thỏa mãn với tất cả $v \in \mathring{H}^1(\mathcal{K})$ và hầu khắp $t \in [0,T]$.

Bây giờ ta đưa ra các định lý nhằm khẳng định sự tồn tại duy nhất và tính chính quy của nghiệm yếu trên $[0,T]$ của bài toán (3.83)−(3.85).

Định lý 3.5. *Với mỗi $h \in C\big(0,T;L_2(\mathcal{K})\big)$ và giả thiết rằng các hệ số của toán tử L thỏa mãn*

$$\sup_{1\le i,j\le n} \{|a_{ij}(x,t)|, |b_i(x,t)|, |c(x,t)| : \ (x,t) \in \mathcal{K}_T\} \le \mu, \ \mu = const.$$

Khi đó bài toán (3.83)−(3.85) có duy nhất nghiệm yếu $u(t), t \in [0,T]$ thỏa mãn

$$\|u(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\mathcal{K})} + \|u_t(t)\|^2_{L_2(\mathcal{K})} \le C \int_0^t \|h(s)\|^2_{L_2(\mathcal{K})} ds, \tag{3.87}$$

với $\forall t \in (0,T]$. Ở đây C là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào $\mathcal{K}, T$ và các hệ số hàm của toán tử L.

Chứng minh. Nội dung chứng minh của Định lý 3.5 được trình bày tương tự như nội dung chứng minh của định lý 3.1 □

b. Tính trơn của nghiệm yếu theo biến thời gian của bài toán tuyến tính

Trong các phát biểu và chứng minh dưới đây, ta sử dụng các giả thiết sau:

$(\mathbf{T}_1)$ Giả sử tồn tại hằng số $\mu > 0$ sao cho

$$\sup_{1\le i,j\le n}\{|a_{ijt^s}(x,t)|, |b_{it^s}(x,t)|, |c_{t^s}(x,t)| : \ (x,t)\in\mathcal{K}_T, s=0,1,2\}\le\mu.$$

$(\mathbf{T_2})$ Giả sử $\beta\in\mathbb{R}, \delta=(\delta_1,\cdots,\delta_d)\in\mathbb{R}^d$ sao cho $\beta,\delta_k\in[0,1],\ k=1,\cdots,d.$

$(\mathbf{T_3})$ Giả sử rằng dải đóng các số thực nằm giữa hai đường thẳng $\lambda=-\frac{1}{2}$ và $\lambda=\frac{1}{2}-\beta$ không chứa các giá trị riêng của toán tử pencil $\mathfrak{U}(\lambda,t),\ t\in[0,T]$. và $-\delta_+^{(k)}<\delta_k-1<\delta_-^{(k)},\ k=1,\cdots,d.$

Lập luận như nội dung chứng minh của định lý 3.2, ta có định lý sau:

Định lý 3.6. *Cho $m\in\mathbb{N}, h_{t^k}\in C\big([0,T];L_2(\mathcal{K})\big),\ k=0,1,\cdots,m$ và giả thiết $(\mathbf{T_1})$ thỏa mãn. Khi đó bài toán (3.83)−(3.85) có nghiệm yếu $u(t), t\in[0,T]$ thỏa mãn*

$$u_{t^k}\in C\big(0,T;\mathring{H}^1(\mathcal{K})\big),\ k=0,1,\cdot,m,\ \forall t\in[0,T], \tag{3.88}$$

$$\sum_{k=0}^{m}\|u_{t^k}(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\mathcal{K})}+\|u_{t^{m+1}}\|^2_{L_2(\mathcal{K})}\le C\sum_{k=0}^{m}\int_0^t\|h_{t^k}(s)\|^2_{L_2(\mathcal{K})}ds. \tag{3.89}$$

Ta định nghĩa không gian $\mathscr{H}^l_{\beta,\delta}$ bao gồm tất cả các hàm u sao cho $u\in\bigcap_{j=0}^{l}C^{(j)}\big(0,T;V^{l-j}_{\beta,\delta}(\mathcal{K})$. Với mỗi $u\in\mathscr{H}^l_{\beta,\delta}$ và với mỗi $t\in[0,T]$, ta định nghĩa các chuẩn sau

$$\|u(t)\|^2_{l,\beta,\delta}=\sum_{j=0}^{l}\|u_{t^j}(t)\|^2_{V^{l-j}_{\beta,\delta}(\mathcal{K})}\ \text{và}\ \|u\|_{\mathscr{H}^l_{\beta,\delta}}=\sum_{j=0}^{k}\|u_{t^j}\|_{C(0,T;V^{l-j}_{\beta,\delta}(\mathcal{K}))}.$$

Bằng việc sử dụng các kết quả trong Định lý 3.6 và Bổ đề 1.11, ta chứng minh tính chính quy của nghiệm yếu trên $[0,T]$ trong không gian Sobolev có trọng, ở đó bất đẳng thức năng lượng được thiết lập.

Định lý 3.7. *Giả sử $(\mathbf{T_1}),(\mathbf{T_2}),(\mathbf{T_3})$ cùng các điều kiện sau thỏa mãn*

(i) $h_{t^k}\in V^0_{\beta,\delta}(\mathcal{K}_T),\ k=0,1,2.$

(ii) $h(x,0)=0.$

Nếu $u(t) \in \mathring{H}^1(\mathcal{K})$ là nghiệm yếu trên $[0,T]$ của bài toán (3.83)–(3.85) thì $u \in \mathscr{H}^2_{\beta,\delta}$ và

$$\|u(t)\|^2_{2,\beta,\delta} \leq C \int\limits_0^t \|h(s)\|^2_{1,\beta,\delta} ds, \ t \in [0,T]. \tag{3.90}$$

Chứng minh. Từ (3.83), ta có

$$L(x,t,\partial)u = h(x,t) - u_{tt}(t). \tag{3.91}$$

Từ $V^0_{\beta,\delta}(\mathcal{K}_T) \hookrightarrow V^{-1}_{0,0}(\mathcal{K})$, ta có

$$h(t) \in V^{-1}_{0,0}(\mathcal{K}) \cap V^0_{\beta,\delta}(\mathcal{K}). \tag{3.92}$$

Bởi giả thiết (i), $h_{tt} \in V^0_{\beta,\delta}(\mathcal{K}_T) \hookrightarrow L_2(\mathcal{K}_T)$. Áp dụng Định lý 3.6, ta có $u_{tt}(t) \in \mathring{H}^1(\mathcal{K}) \hookrightarrow \mathring{V}^1_{0,0}(\mathcal{K})$. Do $\mathring{V}^1_{0,0}(\mathcal{K}) \hookrightarrow V^0_{\beta,\delta}(\mathcal{K})$ nên $u_{tt}(t) \in V^0_{\beta,\delta}(\mathcal{K})$. Hơn nữa, do $V^0_{\beta,\delta}(\mathcal{K}) \hookrightarrow V^{-1}_{0,0}(\mathcal{K})$ nên ta có

$$u_{tt}(t) \in V^{-1}_{0,0}(\mathcal{K}) \cap V^0_{\beta,\delta}(\mathcal{K}). \tag{3.93}$$

Từ (3.92) và (3.93), ta thu được

$$h_1(t) = h(t) - u_{tt}(t) \in V^{-1}_{0,0}(\mathcal{K}) \cap V^0_{\beta,\delta}(\mathcal{K}) = V^{1-2}_{0,0}(\mathcal{K}) \cap V^{2-2}_{\beta,\delta}(\mathcal{K}).$$

Áp dụng Bổ đề 1.11, phương trình (3.91) có nghiệm $u(t) \in V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})$ và

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} &\leq C\|h_1(t)\|^2_{V^0_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} \\ &\leq C\big(\|h(t)\|^2_{V^0_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} + \|u_{tt}(t)\|^2_{V^0_{\beta,\delta}(\mathcal{K})}\big) \\ &\leq C\big(\|h(t)\|^2_{V^0_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} + \|u_{tt}(t)\|^2_{L_2(\mathcal{K})}\big). \end{aligned} \tag{3.94}$$

Ta thấy rằng

$$\|h(t)\|_{V^0_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} \leq \|h(0)\|_{V^0_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} + \int\limits_0^t \|h_t(s)\|_{V^0_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} ds = \int\limits_0^t \|h_t(s)\|_{V^0_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} ds.$$

Suy ra

$$\|h(t)\|^2_{V^0_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} \leq C \int\limits_0^t \|h_t(s)\|^2_{V^0_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} ds. \tag{3.95}$$

Thêm nữa, từ Định lý 3.6, ta có

$$\|u_{tt}(t)\|^2_{L_2(\mathcal{K})} \leq C \sum_{j=0}^{1} \int_0^t \|h_{t^j}(s)\|^2_{L_2(\mathcal{K})} ds. \tag{3.96}$$

Từ (3.94)−(3.96), ta thu được

$$\|u(t)\|^2_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} \leq C \int_0^t \|h_t(s)\|^2_{V^0_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} ds + C \sum_{j=0}^{1} \int_0^t \|h_{t^j}(s)\|^2_{L_2(\mathcal{K})} ds. \tag{3.97}$$

Bởi $\beta, \delta_k \in [0,1]$ $(k = 1, \cdots, d)$, ta có $\mathring{H}^1(\mathcal{K}) \hookrightarrow \mathring{V}^1_{0,0}(\mathcal{K}) \hookrightarrow V^1_{\beta,\delta}(\mathcal{K})$. Do đó $\|u_t(t)\|^2_{V^1_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} \leq C\|u_t(t)\|^2_{\mathring{H}^1(\mathcal{K})}$. Sử dụng Định lý 3.6, ta có

$$\|u_t(t)\|^2_{V^1_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} \leq C \sum_{j=0}^{1} \int_0^t \|h_{t^j}(s)\|^2_{L_2(\mathcal{K})} ds; \tag{3.98}$$

$$\|u_{tt}(t)\|^2_{V^0_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} \leq \|u_{tt}(t)\|^2_{L_2(\mathcal{K})} \leq C \sum_{j=0}^{1} \int_0^t \|h_{t^j}(s)\|^2_{L_2(\mathcal{K})} ds. \tag{3.99}$$

Từ (3.97)−(3.99), ta có $\|u(t)\|^2_{2,\beta,\delta} \leq C \int_0^t \|h(s)\|^2_{1,\beta,\delta} ds, \ \forall\, t \in [0,T]$. □

3.2.3. Bài toán nửa tuyến tính

a. Tính duy nhất của nghiệm yếu của bài toán nửa tuyến tính

Đối với hàm $f: \mathbb{R}^3 \times [0,+\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,t,p) \mapsto f(x,t,p)$, ta ký hiệu $f_t(x,t,p) = \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t,p)$; $f_x(x,t,p) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t,p)$; $f_p(x,t,p) = \dfrac{\partial f}{\partial p}(x,t,p)$. Để khẳng định sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu trên $[0,T]$ của bài toán (3.79)−(3.81), ta cần bổ sung thêm các giả thiết đối với hạng tử phi tuyến $f(x,t,u)$ như sau: Với hằng số $\alpha \in [0,2]$, ta nói rằng hàm $f(x,t,u)$ thỏa mãn điều kiện $(\mathbf{F})$ nếu các điều kiện sau đồng thời xảy ra

$$|f_x(x,t,p)| \leq C|p|^{\alpha+1}; \tag{3.100}$$

$$|f_t(x,t,p)| \leq C|p|^{\alpha+1}; \tag{3.101}$$

$$|f_p(x,t,p)| \le C(1+|p|^\alpha); \tag{3.102}$$

$$|f(x,t,p)-f(x,t,q)| \le C(|p|^\alpha+|q|^\alpha)|p-q|; \tag{3.103}$$

$$|f_x(x,t,p)-f_x(x,t,q)| \le C(|p|^\alpha+|q|^\alpha)|p-q|; \tag{3.104}$$

$$|f_t(x,t,p)-f_t(x,t,q)| \le C(|p|^\alpha+|q|^\alpha)|p-q|; \tag{3.105}$$

$$|f_p(x,t,p)-f_p(x,t,q)| \le C(|p|^{\alpha-1}+|q|^{\alpha-1})|p-q|. \tag{3.106}$$

Ta nhận thấy rằng nếu $f(x,t,0)=0$, từ (3.103), ta có

$$|f(x,t,p)| \le C|p|^{\alpha+1}. \tag{3.107}$$

Tương tự, (3.100), (3.101) và (3.102) tương ứng là hệ quả của (3.104), (3.105) và (3.106) nếu $f_x(x,t,0)=0, f_t(x,t,0)=0$ và $f_p(x,t,0)=0$.

Để minh họa sự tồn tại các giả thiết (3.100)−(3.106), ta xét hàm f có dạng $f(x,t,p)=\varphi(x,t)|p|^\alpha p$, với $\varphi \in C^2(\overline{\mathcal{K}}_T)$. Ta thấy f_{t^j} tồn tại với $j=0,1,2$ và $f(x,t,0)=0$. Thêm nữa, ta có

$$\begin{aligned}
|f_x(x,t,p)| &= |\varphi_x(x,t)||p|^{\alpha+1} \le C|p|^{\alpha+1};\\
|f_t(x,t,p)| &= |\varphi_t(x,t)||p|^{\alpha+1} \le C|p|^{\alpha+1};\\
|f_p(x,t,p)| &= |\varphi(x,t)|(\alpha+1)|p|^\alpha \le C|p|^\alpha;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&|f(x,t,p)-f(x,t,q)|\\
&\qquad \le |\varphi(x,t)|\max\{|p|,|q|\}^\alpha|p-q| \le C(|p|^\alpha+|q|^\alpha)|p-q|;\\
&|f_x(x,t,p)-f_x(x,t,q)|\\
&\qquad \le |\varphi_x(x,t)|\max\{|p|,|q|\}^\alpha|p-q| \le C(|p|^\alpha+|q|^\alpha)|p-q|;\\
&|f_t(x,t,p)-f_t(x,t,q)|\\
&\qquad \le |\varphi_t(x,t)|\max\{|p|,|q|\}^\alpha|p-q| \le C(|p|^\alpha+|q|^\alpha)|p-q|;\\
&|f_p(x,t,p)-f_p(x,t,q)|\\
&\qquad \le |\varphi(x,t)|(\alpha+1)\big||p|^\alpha-|q|^\alpha\big| \le C\big(|p|^{\alpha-1}+|q|^{\alpha-1}\big)|p-q|.
\end{aligned}$$

Chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu địa phương, ta cần bổ đề bổ trợ sau:

Bổ đề 3.3. *Cho $\alpha \in [0,2]$, giả sử $(\mathbf{T_2}),(\mathbf{F})$ thỏa mãn và $f(x,0,0)=0$. Khi đó với mọi $u_1,u_2 \in \mathscr{H}^2_{\beta,\delta}$ sao cho $\max\limits_{t\in[0,T],i\in\{1,2\}} \|u_i\|_{\mathscr{H}^2_{\beta,\delta}} \le R$, đặt $F_i(t)=f\big(x,t,u_i(t)\big)$, $i=1,2$, ta có*

(a) $F_i \in \mathscr{H}^1_{\beta,\delta}$, $i = 1, 2$ *và tồn tại hằng số* $C > 0$ *độc lập với* u_1, u_2 *sao cho với mỗi* $t \in [0, T], i = 1, 2,$

$$\|F_i(t)\|^2_{1,\beta,\delta} \le C\big(\|u_i(t)\|^2_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} + \|u_i(t)\|^{2(\alpha+1)}_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})}\big). \tag{3.108}$$

(b) Tồn tại hằng số $C_R > 0$ *phụ thuộc* R *sao cho với* $\forall t \in [0, T]$,

$$\|F_1(t) - F_2(t)\|_{1,\beta,\delta} \le C_R\|u_1(t) - u_2(t)\|_{2,\beta,\delta}. \tag{3.109}$$

Chứng minh. (a). Ta có

$$\|F_i(t)\|^2_{1,\beta,\delta} = \|F_i(t)\|^2_{V^1_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} + \|F_{it}(t)\|^2_{V^0_{\beta,\delta}(\mathcal{K})},\ i = 1, 2. \tag{3.110}$$

Ta nhận thấy rằng $\|F_i(t)\|^2_{V^1_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} = A + B$, trong đó

$$\begin{aligned} A &= \int\limits_{\mathcal{K}} \rho^{2(\beta-1)} \prod_{k=1}^{d} \Big(\frac{r_k}{\rho}\Big)^{2(\delta_k-1)} |F_i(t)|^2 dx; \\ B &= \int\limits_{\mathcal{K}} \rho^{2\beta} \prod_{k=1}^{d} \Big(\frac{r_k}{\rho}\Big)^{2\delta_k} |DF_i(t)|^2 dx \end{aligned} \tag{3.111}$$

Trong (3.111), áp dụng (3.107) và Bổ đề 1.9, ta có

$$\begin{aligned} A &\le C \int\limits_{\mathcal{K}} \Big(\rho^{2\alpha(\beta-2+\frac{1}{2})} \prod_{k=1}^{d} \Big(\frac{r_k}{\rho}\Big)^{2\alpha(\delta_k-2+\frac{1}{2})} |u_i(t)|^{2\alpha}\Big) \\ &\qquad \times \Big(\rho^{2(\beta-1)+\alpha(1-2\beta)} \prod_{k=1}^{d} \Big(\frac{r_k}{\rho}\Big)^{2(\delta_k-1)+\alpha(1-2\delta_k)} |u_i(t)|^2\Big) dx. \\ &\le C\|u_i(t)\|^{2(\alpha+1)}_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})}. \end{aligned} \tag{3.112}$$

Thêm nữa, từ giả thiết của α, δ_k thì $\alpha + 2 - 2\alpha\delta_k \ge 0$ và sử dụng (3.100), (3.102), ta có

$$\begin{aligned} B \le C\Big[&\int\limits_{\mathcal{K}} \rho^{2\beta} \prod_{k=1}^{d} \Big(\frac{r_k}{\rho}\Big)^{2\delta_k} |u_i(t)|^{2(\alpha+1)} dx \\ &+ \int\limits_{\mathcal{K}} \rho^{2\beta} \prod_{k=1}^{d} \Big(\frac{r_k}{\rho}\Big)^{2\delta_k} \big(1 + |u_i(t)|^{2\alpha}\big) |Du_i(t)|^2 dx \end{aligned}$$

$$\leq C\Big[\int\limits_{\mathcal{K}} \rho^{2\beta}\prod_{k=1}^{d}\Big(\frac{r_k}{\rho}\Big)^{2\delta_k}|u_i(t)|^{2(\alpha+1)}dx + \int\limits_{\mathcal{K}} \rho^{2\beta}\prod_{k=1}^{d}\Big(\frac{r_k}{\rho}\Big)^{2\delta_k}|Du_i(t)|^2dx$$

$$+\int\limits_{\mathcal{K}} \rho^{2\beta}\prod_{k=1}^{d}\Big(\frac{r_k}{\rho}\Big)^{2\delta_k}|u_i(t)|^{\alpha}|Du_i(t))|^2dx\Big]$$

$$=: C\big(B_1+B_2+B_3\big). \tag{3.113}$$

Trong (3.113), bởi $\alpha \in [0,2]$, giả thiết $(\mathbf{T_2})$ và Bổ đề 1.9, ta có

$$B_1 = \int\limits_{\mathcal{K}} \rho^{2\beta}\prod_{k=1}^{d}\Big(\frac{r_k}{\rho}\Big)^{2\delta_k}|u_i(t)|^{2(\alpha+1)}dx \leq C\|u_i(t)\|^{2(\alpha+1)}_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})}.$$

$$B_2 = \int\limits_{\mathcal{K}} \Big(\rho^{2(\beta-1)}\prod_{k=1}^{d}\Big(\frac{r_k}{\rho}\Big)^{2(\delta_k-1)}|Du_i(t)|^2\Big)\Big(\rho^{2}\prod_{k=1}^{d}\Big(\frac{r_k}{\rho}\Big)^{2}\Big)dx$$

$$\leq C\|u_i(t)\|^2_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})}.$$

$$B_3 = \int\limits_{\mathcal{K}} \Big(\rho^{2\alpha(\beta-2+\frac{3}{2})}\prod_{k=1}^{d}\Big(\frac{r_k}{\rho}\Big)^{2\alpha(\delta_k-2+\frac{3}{2})}|u_i(t)|^{2\alpha}\Big)$$

$$\times\Big(\rho^{2\beta+\alpha-2\alpha\beta}\prod_{k=1}^{d}\Big(\frac{r_k}{\rho}\Big)^{2\delta_k+\alpha-2\alpha\delta_k}|Du_i(t)|^2\Big)dx$$

$$\leq C\|u_i(t)\|^{2(\alpha+1)}_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})}.$$

Do đó

$$B \leq C\big(\|u_i(t)\|^2_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} + \|u_i(t)\|^{2(\alpha+1)}_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})}\big). \tag{3.114}$$

Từ (3.111), (3.112) và (3.114), ta có

$$\|F_i(t)\|^2_{V^1_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} \leq C\Big(\|u_i(t)\|^2_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} + \|u_i(t)\|^{2(\alpha+1)}_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})}\Big),\ i=1,2. \tag{3.115}$$

Tiếp theo, ta có

$$\|F_{it}(t)\|^2_{V^0_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} \leq C\Big[\int\limits_{\mathcal{K}} \rho^{2\beta}\prod_{k=1}^{d}\Big(\frac{r_k}{\rho}\Big)^{2\delta_k}|f_t\big(x,t,u_i(t)\big)|^2dx$$

$$+\int\limits_{\mathcal{K}} \rho^{2\beta}\prod_{k=1}^{d}\Big(\frac{r_k}{\rho}\Big)^{2\delta_k}|f_p\big(x,t,u_i(t)\big)|^2|u_{it}(t)|^2dx\Big]$$

$$=: C(M+N). \tag{3.116}$$

Trong biểu thức (3.116), áp dụng (3.101) và Bổ đề 1.9, ta có

$$\begin{aligned} M &\le C\Big(\int\limits_{\mathcal{K}} \rho^{2\beta} \prod_{k=1}^{d} \Big(\frac{r_k}{\rho}\Big)^{2\delta_k} |u_i(t)|^{2(\alpha+1)} dx\Big) \\ &\le C\Big[\int\limits_{\mathcal{K}} \rho^{2(\alpha+1)(\beta-2)} \prod_{k=1}^{d} \Big(\frac{r_k}{\rho}\Big)^{2(\alpha+1)(\delta_k-2)} |u_i(t)|^{2(\alpha+1)} dx\Big] \\ &\le C\|u_i(t)\|^{2(\alpha+1)}_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})}. \end{aligned} \tag{3.117}$$

Thêm nữa, sử dụng (3.102), ta có

$$\begin{aligned} N \le C\Big[&\int\limits_{\mathcal{K}} \rho^{2\beta} \prod_{k=1}^{d} \Big(\frac{r_k}{\rho}\Big)^{2\delta_k} |u_{it}(t)|^2 dx \\ &+ \int\limits_{\mathcal{K}} \rho^{2\beta} \prod_{k=1}^{d} \Big(\frac{r_k}{\rho}\Big)^{2\delta_k} |u_i(t)|^{2\alpha} |u_{it}(t)|^2 dx\Big] \\ =: C\big(&N_1 + N_2\big). \end{aligned} \tag{3.118}$$

Trong (3.118), sử dụng $\alpha \in [0,2], (\mathbf{T_2})$ và áp dụng Bổ đề 1.9, ta có

$$N_1 = \int\limits_{\mathcal{K}} \rho^{2\beta} \prod_{k=1}^{d} \Big(\frac{r_k}{\rho}\Big)^{2\delta_k} |u_{it}(t)|^2 dx \le C\|u_{it}\|^2_{V^1_{\beta,\delta}(\mathcal{K})}. \tag{3.119}$$

$$\begin{aligned} N_2 = &\int\limits_{\mathcal{K}} \rho^{2\alpha(\beta-2+\frac{3}{2})} \prod_{k=1}^{d} \Big(\frac{r_k}{\rho}\Big)^{2\alpha(\delta_k-2+\frac{3}{2})} |u_i(t)|^{2\alpha} \\ &\times \rho^{2\left(\beta-\alpha\beta+\frac{\alpha}{2}\right)} \prod_{k=1}^{d} \Big(\frac{r_k}{\rho}\Big)^{2\left(\delta_k-\alpha\delta_k+\frac{\alpha}{2}\right)} |u_{it}(t)|^2 dx \\ \le C&\|u_i(t)\|^{2\alpha}_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} \|u_{it}\|^2_{V^1_{\beta,\delta}(\mathcal{K})}. \end{aligned} \tag{3.120}$$

Từ (3.118)−(3.120), ta có

$$N \le C\big(\|u_{it}\|^2_{V^1_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} + \|u_i(t)\|^{2\alpha}_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} \|u_{it}\|^2_{V^1_{\beta,\delta}(\mathcal{K})}\big). \tag{3.121}$$

Từ (3.116), (3.117) và (3.121), ta thu được với mỗi $i = 1, 2$ rằng

$$\|F_{it}(t)\|^2_{V^0_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} \leq \big[\|u_{it}\|^2_{V^1_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} + \|u_i(t)\|^{2\alpha}_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})}\|u_{it}\|^2_{V^1_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} + \|u_i(t)\|^{2(\alpha+1)}_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})}\big]. \quad (3.122)$$

Từ (3.110), (3.115) và (3.122), với mỗi $i = 1, 2$ ta có

$$\begin{aligned}\|F_i(t)\|^2_{1,\beta,\delta} &\leq C\big[\|u_{it}\|^2_{V^1_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} + \|u_i(t)\|^{2\alpha}_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})}\|u_{it}\|^2_{V^1_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} \\ &\qquad + \|u_i(t)\|^2_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} + \|u_i(t)\|^{2(\alpha+1)}_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})}\big] \\ &\leq C\big[\|u(t)\|^2_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} + \|u(t)\|^{2(\alpha+1)}_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})}\big]. \end{aligned} \quad (3.123)$$

Kết luận (3.108) được chứng minh.

(b). Ta thấy rằng

$$\|F_1(t) - F_2(t)\|^2_{1,\beta,\delta} = \|F_1(t) - F_2(t)\|^2_{V^1_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} + \|F_{1t}(t) - F_{2t}(t)\|^2_{V^0_{\beta,\delta}(\mathcal{K})}. \quad (3.124)$$

Lập luận tương tự như chứng minh trong phần (a), ta thu được

$$\begin{aligned}\|F_1(t) - F_2(t)\|^2_{V^1_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} &\leq C\big(1 + \|u_2(t)\|^2_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} + \|u_1(t)\|^{2\alpha}_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})}\big) \\ &\qquad \times \|u_1(t) - u_2(t)\|^2_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})}. \end{aligned} \quad (3.125)$$

$$\begin{aligned}\|F_{1t}(t) - F_{2t}(t)\|^2_{V^0_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} &\leq C\big(1 + \|u_{2t}(t)\|^2_{V^1_{\beta,\delta}(\mathcal{K})}\big)\|u_1(t) - u_2(t)\|^2_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} \\ &\qquad + C\big(1 + \|u_1(t)\|^{2\alpha}_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})}\big)\|u_{1t}(t) - u_{2t}(t)\|^2_{V^1_{\beta,\delta}(\mathcal{K})}. \end{aligned} \quad (3.126)$$

Từ (3.124), (3.125) và (3.126), bởi giả thiết $\max\limits_{t\in[0,T], i\in\{1,2\}} \|u_i(t)\|_{\mathscr{H}^2_{\beta,\delta}} \leq R$, ta kết luận được rằng $\|F_1(t) - F_2(t)\|^2_{1,\beta,\delta} \leq C_R\|u_1(t) - u_2(t)\|^2_{2,\beta,\delta}$. □

Định lý 3.8. *Cho $\alpha \in [0, 2]$, giả sử $(\mathbf{T_1}), (\mathbf{T_2}), (\mathbf{T_3}), (\mathbf{F})$ thỏa mãn và $h \in L_2\big(0, T; \mathscr{H}^1_{\beta,\delta}\big)$; $h_{t^k} \in V^0_{\beta,\delta}(\mathcal{K}_T)$, $k = 0, 1, 2$; $f(x, 0, 0) = 0$; $h(x, 0) = 0$. Khi đó bài toán (3.79)–(3.81) có duy nhất nghiệm yếu $u \in \mathscr{H}^2_{\beta,\delta}$ trên $[0, \tau]$, $0 < \tau \leq T$ và*

$$\|u\|^2_{\mathscr{H}^2_{\beta,\delta}} \leq C\big(1 + \|h\|^2_{L_2(0,T;\mathscr{H}^1_{\beta,\delta})}\big), \quad (3.127)$$

ở đây C là hằng số dương không phụ thuộc u.

Chứng minh. Lấy hằng số dương R và $\tau \in [0,T]$ bất kỳ, ta xét tập hợp

$$M_\tau = \big\{u \in \mathscr{H}^2_{\beta,\delta} :\ u(0) = u_t(0) = 0, \|u(t)\|_{2,\beta,\delta} \le R, \forall t \in (0,\tau]\big\}. \tag{3.128}$$

Áp dụng Định lý 3.7, với mỗi $u \in M_\tau$ thì bài toán

$$\begin{cases} v_{tt} + L(x,t,\partial)v = f(x,t,u) + h(x,t), & (x,t) \in \mathcal{K}_\tau, \\ v(x,0) = v_t(x,0) = 0, & x \in \mathcal{K}, \\ v(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial K_\tau, \end{cases} \tag{3.129}$$

có duy nhất nghiệm $v \in \mathscr{H}^2_{\beta,\delta}$. Do đó tồn tại ánh xạ

$$\Phi :\ M_\tau \to \mathscr{H}^2_{\beta,\delta} \quad u \mapsto \Phi(u) = v.$$

Ta sẽ khẳng định rằng với cách chọn $\tau > 0$ phù hợp thì Φ là ánh xạ co thỏa mãn $\Phi(M_\tau) \subset M_\tau$.

1. Trước hết với mỗi $u \in M_\tau$ đã chọn, nghiệm tương ứng $v = \Phi(u)$ của bài toán (3.129) thỏa mãn với mọi $t \in [0,\tau]$ bất đẳng thức

$$\|v(t)\|^2_{2,\beta,\delta} \le C \int_0^t \|F(s)\|^2_{1,\beta,\delta} ds \le C \int_0^\tau \|F(s)\|^2_{1,\beta,\delta} ds, \tag{3.130}$$

ở đây $F(t) = f(x,t,u) + h(x,t)$. Áp dụng Bổ đề 3.3, ta có

$$\int_0^\tau \|F(s)\|^2_{1,\beta,\delta} ds \le C\tau\big(R^2 + R^{2(\alpha+1)}\big) + C\|h\|^2_{L_2(0,\tau;\mathscr{H}^1_{\beta,\delta})},$$

trong đó $C > 0$ là hằng số độc lập với u. Khi đó với $\tau > 0$ đủ nhỏ sao cho $C\tau\big(R^2 + R^{2(\alpha+1)}\big) + C\|h\|^2_{L_2(0,\tau;\mathscr{H}^1_{\beta,\delta})} \le R^2$, ta có $\|v(t)\|_{2,\beta,\delta} \le R$, $\forall t \in (0,\tau]$. Điều này chứng tỏ $\Phi(M_\tau) \subset M_\tau$.

2. Tiếp theo, ta lấy $u_1, u_2 \in M_\tau$. Khi đó Bài toán (3.129) có nghiệm tương ứng duy nhất $v_1 = \Phi(u_1), v_2 = \Phi(u_2)$. Đặt $v = v_1 - v_2$ thì v là nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} v_{tt} + L(x,t,\partial)v = F_1(x,t) - F_2(x,t), & (x,t) \in \mathcal{K}_\tau, \\ v(x,0) = v_t(x,0) = 0, & x \in \mathcal{K}, \\ v(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\mathcal{K}_\tau, \end{cases} \tag{3.131}$$

ở đây $F_i(t) = f(x,t,u_i), i = 1,2$. Lập luận tương tự như trên và áp dụng Bổ đề 3.3, ta có

$$\|\Phi(u_1) - \Phi(u_2)\|_{2,\beta,\delta} = \|v(t)\|^2_{2,\beta,\delta} \le C \int\limits_0^\tau \|F_1(s) - F_2(s)\|^2_{1,\beta,\delta} ds$$
$$\le C_R \tau \|u_1(t) - u_2(t)\|^2_{2,\beta,\delta}. \quad (3.132)$$

Do đó $\|\Phi(u_1) - \Phi(u_2)\|_{2,\beta,\delta} \le \delta \|u_1(t) - u_2(t)\|_{2,\beta,\delta}, \ \forall\, t \in (0,\tau]$ với hằng số $0 < \delta < 1$ được chọn từ $\tau > 0$ đủ nhỏ. Khi đó Φ là ánh xạ co thỏa mãn $\Phi(M_\tau) \subset M_\tau$. Áp dụng nguyên lý ánh xạ co, tồn tại duy nhất $u \in M_\tau$ thỏa mãn $\Phi(u) = u$. Vậy bài toán (3.79)−(3.81) có duy nhất nghiệm $u \in M_\tau$ và $\|u(t)\|^2_{2,\beta,\delta} \le C\big(1 + \|h\|^2_{L_2(0,T;\mathscr{H}^1_{\beta,\delta})}\big), \ \forall\, t \in (0,\tau]$. □

Trước khi đưa ra khẳng định sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán (3.79)−(3.81) trên đoạn $[0,T]$, ta có bổ đề sau

Bổ đề 3.4. *Cho $g : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ là hàm không giảm và tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho $g|_{[0,\varepsilon]} \in C^1([0,\varepsilon]), g(0) = g'(0) = 0$. Khi đó tồn tại $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ phụ thuộc số $b > 0$ nào đó và ε_1 là duy nhất thỏa mãn*

$$b + Mg(x) > x, \quad \text{với } 0 \le x < \varepsilon_1, \quad (3.133)$$
$$b + Mg(x) < x, \quad \text{với } \varepsilon_1 < x < \varepsilon_2 \quad (3.134)$$

với b đủ nhỏ.

Chứng minh. Đặt $f(x) = b + Mg(x) - x$. Nhận thấy f là hàm liên tục trên $[0,+\infty)$. Ta có $f'(0) = -1 < 0$ nên tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho $f'(x) < 0, \ \forall\, 0 \le x \le \varepsilon$. Điều này đưa đến f là hàm nghịch biến trên $[0,\varepsilon]$.

Ta có g là hàm không giảm nên $g(x) \le g(\varepsilon) = C, \ \forall\, x \in [0,\varepsilon]$. Từ $f'(x) < 0, \ \forall\, 0 \le x \le \varepsilon$, ta có $g'(x) < \dfrac{1}{M}, \ \forall\, 0 \le x \le \varepsilon$.

Áp dụng định lý Lagrange đối hàm g trên $[0,\varepsilon]$, ta có $g(\varepsilon) = g(\varepsilon) - g(0) = g'(\xi)\varepsilon < \dfrac{1}{M}\varepsilon$. Do đó $\varepsilon > MC$. Ta chọn ε_2 sao cho $MC < \varepsilon_2 < \varepsilon$. Khi đó với $b > 0$ đủ nhỏ thì $MC < \varepsilon_2 - b < \varepsilon$. Suy ra $g(\varepsilon) = C < \dfrac{\varepsilon_2 - b}{M}$. Do đó $g(\varepsilon_2) < \dfrac{\varepsilon_2 - b}{M}$. Từ đây ta thu được $f(\varepsilon_2) < 0$. Từ $f(0) = b > 0$

cùng với tính nghịch biến của f trên $[0,\varepsilon]$ nên f nghịch biến trên $[0,\varepsilon_2]$. Do đó, bởi tính liên tục của f nên tồn tại duy nhất $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon_2)$ sao cho $f(\varepsilon_1) = 0$. Từ đây ta thu được (3.133) và (3.134). □

Định lý 3.9. *Giả sử các giả thiết trong Định lý 3.8 thỏa mãn. Khi đó bài toán (3.79)−(3.81) có duy nhất nghiệm yếu $u \in \mathscr{H}^2_{\beta,\delta}$ trên $[0,T]$ và*

$$\|u(t)\|^2_{2,\beta,\delta} \le C\big(1 + \|h\|^2_{L_2(0,T;\mathscr{H}^1_{\beta,\delta})}\big),\ \forall\, t \in (0,T],$$

ở đây C là hằng số độc lập với u.

Chứng minh. Gọi $u \in M_\tau, \tau \in [0,T]$ là nghiệm của bài toán (3.79)-(3.81). Áp dụng Bổ đề 3.3, và Định lý 3.8, ta có

$$\begin{aligned}\|u(t)\|^2_{2,\beta,\delta} &\le C\|h\|^2_{L_2(0,T;\mathscr{H}^1_{\beta,\delta})} + CT\big(\|u(t)\|^2_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} + \|u(t)\|^{2(\alpha+1)}_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})}\big),\\ &\le b + M\big(\|u(t)\|^2_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} + \|u(t)\|^{2(\alpha+1)}_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})}\big),\end{aligned}$$

đúng với $\forall\, t \in [0,\tau]$, ở đây $b = C\|h\|^2_{L_2(0,T;\mathscr{H}^1_{\beta,\delta})}, M = CT$.

Đặt $\sigma(\tau) = \sup\limits_{0\le t\le\tau} \|u(t)\|_{2,\beta,\delta}$, ta thu được

$$\sigma(t) \le b + Mg(\sigma(t)), \tag{3.135}$$

ở đây $g(s) = s^2 + s^{2(\alpha+1)}$. Rõ ràng hàm g thỏa mãn Bổ đề 3.4, vì vậy tồn tại $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ phụ thuộc b và ε_1 là duy nhất sao cho

$$\begin{aligned} b + Mg(x) &> x, \quad \text{với } 0 \le x < \varepsilon_1,\\ b + Mg(x) &< x, \quad \text{với } \varepsilon_1 < x < \varepsilon_2.\end{aligned}$$

với b đủ nhỏ. Nếu ta giả thiết $\sigma(0) = b < \varepsilon_1$ thì $\sigma(\tau) \le \varepsilon_1,\ \forall\, \tau > 0$. Thật vậy, giả sử $\sigma(\tau_1) > \varepsilon$, với $\tau_1 > 0$ nào đó. Khi đó bởi tính liên tục của σ nên tồn tại $\tau_2 < \tau_1$ mà $\varepsilon_1 < \sigma(\tau_2) < \varepsilon_2$. Do đó (3.135) không thỏa mãn đối với τ_2. Vậy điều giả sử là sai.

Với kết quả trên, bài toán (3.79)−(3.81) có nghiệm yếu trên $[0,\tau]$ $(0 < \tau \le T)$ bị chặn bởi hằng số dương độc lập với biến t. Áp dụng phương pháp thác triển nghiệm, bài toán (3.79)−(3.81) có duy nhất nghiệm yếu $u(t)$ xác định trên $[0,T]$ và $\|u(t)\|^2_{2,\beta,\delta} \le C\big(1 + \|h\|^2_{L_2(0,T;\mathscr{H}^1_{\beta,\delta})}\big),\ \forall\, t \in (0,T]$. □

b. Ví dụ

Để khẳng định sự tồn tại của bài toán (3.79)−(3.81), ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 3.3. Trên nón $\mathcal{K}$ có cạnh trong $\mathbb{R}^3, \mathcal{K}_T = \mathcal{K} \times (0,T), 0 < T < \infty$, ta xét bài toán sau

$$\begin{cases} u_{tt} + L(x,t,\partial)u + \varphi(x,t)|u|^\alpha u = h(x,t), & (x,t) \in \mathcal{K}_T, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & x \in \mathcal{K}, \\ u_{\partial\mathcal{K}} = 0, \end{cases} \tag{3.136}$$

Ta giả thiết rằng $\alpha \in [0,2], \varphi \in C^2(\overline{\mathcal{K}}_T), h \in L_2(0,T;\mathscr{H}^1_{\beta,\delta})$ và $(\mathbf{T_1}), (\mathbf{T_2})$, $(\mathbf{T_3})$ thỏa mãn.

Ta thấy $f(x,t,p) = \varphi(x,t)|p|^\alpha p$ có các đạo hàm f_{t^j} $(j = 0,1,2)$ tồn tại và $f(x,0,0) = 0$. Thêm nữa, ta có

$$\begin{aligned} |f(x,t,p)| &= |\varphi(x,t)||p|^{\alpha+1} \le C|p|^{\alpha+1}; \\ |f_x(x,t,p)| &= |\varphi_x(x,t)||p|^{\alpha+1} \le C|p|^{\alpha+1}; \\ |f_t(x,t,p)| &= |\varphi_t(x,t)||p|^{\alpha+1} \le C|p|^{\alpha+1}; \\ |f_p(x,t,p)| &= |\varphi(x,t)|(\alpha+1)|p|^\alpha \le C|p|^\alpha; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &|f(x,t,p) - f(x,t,q)| \\ &\qquad \le |\varphi(x,t)|(\alpha+1)\max\{|p|,|q|\}^\alpha|p-q| \le C(|p|^\alpha + |q|^\alpha)|p-q|; \\ &|f_x(x,t,p) - f_x(x,t,q)| \\ &\qquad \le |\varphi_x(x,t)|(\alpha+1)\max\{|p|,|q|\}^\alpha|p-q| \le C(|p|^\alpha + |q|^\alpha)|p-q|; \\ &|f_t(x,t,p) - f_t(x,t,q)| \\ &\qquad \le |\varphi_t(x,t)|(\alpha+1)\max\{|p|,|q|\}^\alpha|p-q| \le C(|p|^\alpha + |q|^\alpha)|p-q|; \\ &|f_p(x,t,p) - f_p(x,t,q)| \\ &\qquad \le |\varphi(x,t)|(\alpha+1)\big||p|^\alpha - |q|^\alpha\big| \le C\big(|p|^{\alpha-1} + |q|^{\alpha-1}\big)|p-q|. \end{aligned}$$

Bây giờ, ta lấy $u_1, u_2 \in \mathscr{H}^2_{\beta,\delta}$ thỏa mãn $\max\limits_{t\in[0,T], i\in\{1,2\}} \|u_i\|_{\mathscr{H}^2_{\beta,\delta}} \le R$ và đặt $F(t) = f(x,t,u)$. Khi đó ta có

$$\|F_i(t)\|^2_{V^1_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} = \int\limits_{\mathcal{K}} \rho^{2(\beta-1)} \prod_{k=1}^{d} \Big(\frac{r_k}{\rho}\Big)^{2(\delta_k-1)} |\varphi|^2 |u_i(t)|^{2(\alpha+1)} dx$$

$$+\int_{\mathcal{K}} \rho^{2\beta}\prod_{k=1}^{d}\left(\frac{r_k}{\rho}\right)^{2\delta_k}|D\varphi||u_i(t)|^{2(\alpha+1)}dx$$

$$+(\alpha+1)\int_{\mathcal{K}} \rho^{2\beta}\prod_{k=1}^{d}\left(\frac{r_k}{\rho}\right)^{2\delta_k}|\varphi||Du_i(t)|^2|u(t)|^{2\alpha}dx$$

$$\leq C\|u_i(t)\|^{2(\alpha+1)}_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})},$$

ở đây C là hằng số dương độc lập với u_i.

$$\|F_{it}(t)\|^2_{V^0_{\beta,\delta}(\mathcal{K})} \leq \int_{\mathcal{K}} \rho^{2\beta}\prod_{k=1}^{d}\left(\frac{r_k}{\rho}\right)^{2\delta}|\varphi_t|^2|u_i(t)|^{2(\alpha+1)}dx$$

$$+(\alpha+1)\int_{\mathcal{K}} \rho^{2\beta}\prod_{k=1}^{d}\left(\frac{r_k}{\rho}\right)^{2\delta_k}|\varphi||u_{it}(t)|^2|u_i(t)|^{2\alpha}dx$$

$$\leq C\|u_i(t)\|^{2(\alpha+1)}_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})}.$$

Ở đây C là một hằng số dương độc lập với u. Do đó

$$\|F_i(t)\|^2_{1,\beta,\delta} \leq C\|u_i(t)\|^{2(\alpha+1)}_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})},\ \forall t\in[0,T]$$

với C là hằng số dương độc lập với t và u_i. Lập luận tương tự, ta có

$$\|F_1(t)-F_2(t)\|_{1,\beta,\delta} \leq C_R\|u_1(t)-u_2(t)\|_{2,\beta,\delta},\ t\in[0,T],$$

ở đây C_R là hằng só dương phụ thuộc R. Vì vậy, (a) và (b) trong Bổ đề 3.3 thỏa mãn. Lập luận tương tự như Định lý 3.8, bài toán (3.136) có duy nhất nghiệm yếu $u(t), t\in[0,\tau],\ 0<\tau\leq T$. Từ các kết quả trên, ta có bất đẳng thức $\sigma(t)\leq b+Mg(\sigma(t)), \forall t\in[0,T]$, ở đây $\sigma(t)=\sup\limits_{t\in[0,\tau]}\|u(t)\|^2_{V^2_{\beta,\delta}(\mathcal{K})},\ g(s)=s^{\alpha+1}$. Lập luận tương tự như Định lý 3.9, bài toán (3.136) có nghiệm yếu $u(t), t\in[0,T]$.

Trước khi đưa ra ví dụ tiếp theo, chúng ta xác định các toán tử pencil $A_k(\lambda)$ và $\mathfrak{U}(\lambda)$ sinh bởi bài toán

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{trong } \mathcal{K}, \\ u=0 & \text{trên } \Gamma_j,\ j=1,\cdots,d. \end{cases} \tag{3.137}$$

Trước hết, ta nhắc lại toán tử Laplace-Beltrami và giá trị riêng của toán tử này. Cho Ω là một tập con mở của mặt cầu đơn vị S^{n-1} trong $\mathbb{R}^n,\ n\geq 3$,

với biên $\partial\Omega$. Thêm nữa, cho $\mathcal{K}$ là một nón bị chặn

$$\mathcal{K} = \Big\{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ \omega = \frac{x}{|x|} \in \Omega\Big\}.$$

Ta kí hiệu $\rho = \rho(x) = |x|$. Ta quan tâm tới nghiệm của bài toán Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta U = 0 & \text{trong } \mathcal{K}, \\ U = 0 & \text{trên } \partial\mathcal{K} \setminus \{0\}. \end{cases} \tag{3.138}$$

Nghiệm của bài toán này có dạng

$$U(x) = \rho^\lambda u(\omega), \tag{3.139}$$

ở đây λ là một số phức. Nếu $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, khi đó $\Omega = S^{n-1}$, thì (3.138) được xét mà không cần tới điều kiện biên.

Bởi hệ tọa độ cầu $\rho, \eta_1, \cdots, \eta_{n-1}$ thì tọa độ Cartesian $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ được biến đổi thành

$$\begin{cases} x_1 & = \rho\cos\eta_1, \\ x_2 & = \rho\sin\eta_1\cos\eta_2, \\ & \vdots \\ x_{n-1} & = \rho\sin\eta_1\sin\eta_2\cdots\sin\eta_{n-2}\cos\eta_{n-1}, \\ x_n & = \rho\sin\eta_1\sin\eta_2\cdots\sin\eta_{n-2}\sin\eta_{n-1}, \end{cases}$$

ở đây $\eta_1, \cdots, \eta_{n-2} \in [0, \pi],\ \eta_{n-1} \in [0, 2\pi]$. Khi đó ta có

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{n-1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\delta, \tag{3.140}$$

với

$$\delta = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{q_j(\sin\eta_j)^{n-j-1}} \frac{\partial}{\partial\eta_j}\Big((\sin\eta_j)^{n-j-1}\frac{\partial}{\partial\eta_j}\Big), \tag{3.141}$$

$$q_1 = 1, q_j = (\sin\eta_1\sin\eta_2\cdots\sin\eta_{j-1})^2,\ j = 2, \cdots, n-1. \tag{3.142}$$

Toán tử δ được gọi là toán tử Laplace-Beltrami, gọi tắt là toán tử Beltrami.

Khi này U là nghiệm của (3.138) nếu và chỉ nếu hàm $\rho^{2-n}U(x/\rho^2)$ là nghiệm của (3.138). Phép biến đổi $U(x) \to \rho^{2-n}U(x/\rho^2)$ được gọi là phép biến đổi *Kelvin*. Thay (3.139) vào (3.138), ta có

$$\begin{cases} -\delta u - \lambda(\lambda + n - 2)u = 0 & \text{trong } \Omega, \\ u = 0 & \text{trên } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.143}$$

Ta đưa ra chuẩn

$$\|u\|_{\mathring{W}^{1,2}(\Omega)} = \Big(\int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{q_j}\Big|\frac{\partial u}{\partial \eta_j}\Big|^2 d\omega\Big)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.144}$$

ở đây $d\omega = \sin^{n-2}\eta_1 \sin^{n-3}\eta_2 \cdots \sin\eta_{n-2} d\eta_1 \cdots d\eta_{n-1}$ là độ đo trên Ω. Ta có

$$-\int\limits_{\Omega} \delta u \cdot \overline{u} d\omega = \|u\|^2_{\mathring{W}^{1,2}(\Omega)}$$

với mọi $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Gọi $W^{1,2}(\Omega)$ là không gian Sobolev với chuẩn

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \big(\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^2_{\mathring{W}^{1,2}(\Omega)}\big)^{\frac{1}{2}}$$

và gọi $\mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ là bao đóng của $C_0^\infty(\Omega)$ tương ứng với chuẩn (3.144). Không gian $W^{-1,2}(\Omega)$ được gọi là không gian đối ngẫu của $\mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ tương ứng với tích trong trong $L_2(\Omega)$. Khi đó ta xác định được toán tử

$$-\delta - \lambda(\lambda + n - 2): \ \mathring{W}^{1,2}(\Omega) \to W^{-1,2}(\Omega)$$

của bài toán (3.143), được kí hiệu là $\mathfrak{U}(\lambda)$. Ở đây δ được hiểu như là mở rộng của *Friedrichs* của toán tử vi phân (3.141) xác định trên $C_0^\infty(\Omega)$. Toán tử $-\delta$ là tự liên hợp, không âm và có phổ rời rạc. Rõ ràng rằng λ là một giá trị riêng của toán tử pencil $\mathfrak{U}$ nếu và chỉ nếu $\lambda(\lambda + n - 2)$ là giá trị riêng của toán tử $-\delta$.

Cho $\{\Lambda_j\}_{j\geq 1}$ là dãy không giảm các giá trị riêng của toán tử $-\delta$ đếm được với số mũ của chúng. Thêm nữa, gọi $\{\varphi_j\}_{j\geq 1}$ là cơ sở trực chuẩn trong $L_2(\Omega)$ đồng thời là dãy các hàm riêng tương ứng với các giá trị riêng Λ_j. Khi đó

$$\lambda_{\pm j} = 1 - \frac{n}{2} \pm \sqrt{\Big(1 - \frac{n}{2}\Big)^2 + \Lambda_j}, \ j = 1, 2, \cdots, \tag{3.145}$$

là các giá trị riêng của toán tử pencil $\mathfrak{U}$ và $v_{\pm j} = \varphi_j$ là các hàm riêng tương ứng. Từ chỗ $\Lambda_j \geq 0$, ta có $\lambda_j \geq 0$ và $\lambda_{-j} \leq 2 - n$ với $j = 1, 2, \cdots$. Đặc biệt dải số thực $\Big|\mathrm{Re}\ \lambda - 1 + \frac{n}{2}\Big| < \sqrt{\Big(1 - \frac{n}{2}\Big)^2 + \Lambda_1}$ không chứa các giá trị riêng của $\mathfrak{U}$.

Trong nón bị chặn $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3$, xét toán tử $L(D_x) = -\Delta$, ta có bài toán Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{trong } \mathcal{K}, \\ u = 0 & \text{trên } \partial\mathcal{K}. \end{cases} \tag{3.146}$$

Các toán tử pencil $A_k(\lambda), \mathfrak{U}(\lambda)$ sinh bởi bài toán Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{trong } \mathcal{K}, \\ u = 0 & \text{trên } \Gamma_j,\ j = 1, \cdots, d \end{cases} \tag{3.147}$$

được xác định như sau:

- Đối với toán tử $A_k(\lambda)$: Ta lấy M_k là một cạnh nào đó của nón $\mathcal{K}$ trong $\mathbb{R}^3$. Gọi $\Gamma_{k_+}, \Gamma_{k_-}$ là các mặt của nón $\mathcal{K}$ có chung cạnh M_k. Kí hiệu $\Gamma^0_{k_+}, \Gamma^0_{k_-}$ tương ứng là hai nửa mặt phẳng tiếp xúc với $\Gamma_{k_+}, \Gamma_{k_-}$ tại M_k và có bờ là M_k. Ta thu được nhị diện $\mathcal{D}_k$ sinh bởi $\Gamma^0_{k_+}, \Gamma^0_{k_-}$ có cạnh M_k. Gọi θ_k với $0 < \theta_k \leq 2\pi$, là góc mở của $\mathcal{D}_k$. Ta xét bài toán Dirichlet sau

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{trong } \mathcal{K}, \\ u = 0 & \text{trên } \Gamma^0_{k_\pm}. \end{cases} \tag{3.148}$$

Toán tử pencil tương ứng sinh bởi bài toán (3.148), kí hiệu $A_k(\lambda)$ với λ là số phức bất kì. Ta gọi r, φ là tọa độ cực trong phẳng trực giao với M_k sao cho $\varphi = \varphi(x) = \pm\frac{\theta_k}{2}$ với $x \in \Gamma^0_{k_\pm}$ và $r = \text{dist}(x, M_k)$ với $x \in \mathcal{K}$. Khi đó toán tử pencil $A_k(\lambda)$ được xác định bởi $A_k(\lambda)U(\varphi) = r^{2-\lambda}(-\Delta)(r^\lambda U(\varphi))$. Từ (3.140), $\Delta U = \dfrac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$. Ta có $A_k(\lambda) = -\dfrac{d^2}{d\varphi^2} - \lambda^2$ ánh xạ từ $W^{2,2}\Big(-\frac{\theta_k}{2}, \frac{\theta_k}{2}\Big) \cap \mathring{W}^{1,2}\Big(-\frac{\theta_k}{2}, \frac{\theta_k}{2}\Big) \to L_2\Big(-\frac{\theta_k}{2}, \frac{\theta_k}{2}\Big)$. Áp dụng kết quả trong [53, Chapter 2], các giá trị riêng của $A_k(\lambda)$ là $\lambda_j = j\dfrac{\pi}{\theta_k},\ j = \pm 1, \pm 2, \cdots$. Từ đây các số dương $\delta^{(k)}_+$ và $\delta^{(k)}_-$ được chọn tốt nhất sao cho dải $-\delta^{(k)}_- < \text{Re}\ \lambda < \delta^{(k)}_+$ không chứa giá trị riêng nào của toán tử pencil $A_k(\lambda)$ là

$$\delta^{(k)}_- = \delta^{(k)}_+ = \frac{\pi}{\theta_k}. \tag{3.149}$$

- Đối với toán tử pencil $\mathfrak{U}(\lambda)$: Với mỗi $\lambda \in \mathbb{C}$, ta định nghĩa toán tử phụ thuộc λ, $\mathcal{L}(\lambda)U = \rho^{2-\lambda}(-\Delta)(\rho^\lambda U(\omega))$, ở đây $\rho = \rho(x) = |x|, \omega = \omega(x) = \frac{x}{|x|},\ x \in \mathcal{K}, U$ là hàm xác định trên Ω của nón $\mathcal{K}$. Ta định nghĩa toán tử

pencil $\mathfrak{U}(\lambda)$ xác định bởi $\mathfrak{U}(\lambda):\ \mathring{W}^{1,2}(\Omega)=\mathring{V}_0^{1,2}(\Omega)\to W^{-1,2}(\Omega),\ U\mapsto -\Delta U$. Ta có toán tử Beltrami $-\delta=\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$ trên Ω. Từ (3.145), giá trị riêng của $\mathfrak{U}(\lambda)$ xác định bởi $\lambda_{\pm k}=-\dfrac{1}{2}\pm\sqrt{\Lambda_k+\dfrac{1}{4}}$. Khi đó khoảng đóng $[-1;0]$ không chứa các giá trị riêng của $\mathfrak{U}(\lambda)$.

Từ các kết quả đạt được đối với toán tử A_k và $\mathfrak{U}$ trên nón bị chặn $\mathcal{K}\subset\mathbb{R}^3$, các giả thiết $(\mathbf{T_2}),(\mathbf{T_3})$ được xác định rõ như sau:

$(\mathbf{T}^*)$ Giả sử $\beta\in\mathbb{R},\delta=(\delta_1,\cdots,\delta_d)\in\mathbb{R}^d$ sao cho

$$\beta\in\left[0,\frac{1}{2}\right],-\frac{\pi}{\theta_k}<\delta_k-1<\frac{\pi}{\theta_k},\ k=1,2,\cdots,d.$$

Bây giờ chúng ta xét phương trình *Sine-Gordon* trong nón có cạnh.

Ví dụ 3.4.

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=\sin u & (x,t)\in\mathcal{K}_T,\\ u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=0 & x\in\mathcal{K},\\ u|_{\partial\mathcal{K}_T}=0. \end{cases}\tag{3.150}$$

Ta có $f(x,t,p)=\sin p, h(x,t)\equiv 0$ trên $\mathcal{K}_T$. Do đó nghiệm yếu của bài toán tồn tại duy nhất trên $[0,T]$. Áp dụng Định lý 3.7, giả sử $(\mathbf{T}^*)$ thỏa mãn và nếu $u(t)\in\mathring{H}^1(\mathcal{K})$ là nghiệm yếu của bài toán (3.150) thì $u\in\mathscr{H}^2_{\beta,\delta}$ và $\|u(t)\|^2_{2,\beta,\delta}\le C\int\limits_0^t\|f(s)\|^2_{1,\beta,\delta}ds,\ t\in[0,T]$. Bây giờ ta giả thiết rằng $\alpha=0$ thì hàm $F(t):=f(x,t,u)=\sin u$ thỏa mãn Bổ đề 3.3. Áp dụng Định lý 3.9, bài toán có nghiệm yếu trên $[0,T]$.

Kết luận chương 3

Sử dụng phương pháp xấp xỉ Galerkin, áp dụng bài toán elliptic trong miền đa diện và nguyên lý điểm bất động, chúng tôi khẳng định tồn tại duy nhất, biểu diễn tính chính quy của nghiệm yếu trên $[0,T]$ $(0<T<\infty)$ trong không gian Sobolev có trọng $\mathscr{H}^k_a,\mathscr{H}^2_{\beta,\delta}$ của bài toán Dirichlet-Cauchy đối với phương trình hyperbolic nửa tuyến tính cấp hai trong các miền có cạnh và nón có cạnh. Trong phương trình của bài toán chúng tôi xét lớp các hàm $F(x,t,u,Du),F(x,t,u)$. Vì vậy kết quả đạt được đã thể hiện qua tính tổng quát của phương trình so với [58].

Chương 4

PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN SÓNG NỬA TUYẾN TÍNH VỚI CẤU TRÚC TẮT DẦN

Trong chương này chúng tôi nghiên cứu bài toán giá trị ban đầu không địa phương trong lớp phương trình vi phân cấp hai nửa tuyến tính trong không gian Banach với cấu trúc tắt dần, đây là một dạng trừu tượng của bài toán biên ban đầu đối với phương trình truyền sóng với cấu trúc tắt dần. Bằng việc sử dụng độ không compact phù hợp trên không gian các hàm nhận giá trị trong không gian Banach liên tục bị chặn trên $\mathbb{R}^+$ và định lý ánh xạ nén trong [4, 45], chúng tôi chứng minh sự tồn tại nghiệm mềm phân rã theo tốc độ mũ của bài toán.

4.1. Thiết lập bài toán

Trước khi thiết lập bài toán đối với phương trình truyền sóng với cấu trúc tắt dần, ta xét các ví dụ sau:

4.1.1. Ví dụ mở đầu

1. Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền bị chặn với biên $\partial\Omega$ đủ trơn. Ta xét bài toán sau:

$$u_{tt}(t,x) - \rho\Delta_x u_t(t,x) + \Delta_x^2 u(t) = f(t,x,u(t,x)),\ t > 0, x \in \Omega, \tag{4.1}$$

$$u(0,x) + \int\limits_{\Omega} k(x,y)u(0,y)dy = \varphi(x),\ x \in \Omega, \tag{4.2}$$

$$u_t(0,x) + \sum_{i=1}^{n} C_i u(t_i,x) = \psi(x),\ x \in \Omega, \tag{4.3}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{4.4}$$

ở đây $f:\ \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục, $\varphi \in \mathring{H}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \psi \in L^2(\Omega)$ và $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$ sao cho $\Delta_x k \in L^2(\Omega \times \Omega)$. Bằng cách đặt $X = L_2(\Omega)$, toán tử $\mathcal{A} = -\Delta_x$ có miền xác định $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathring{H}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Theo Ví dụ

1.3 thì $-\mathcal{A}$ sinh ra C_0-nửa nhóm $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ giải tích, compact và ổn định mũ. Chúng ta viết

$$u(t) = u(t,\cdot), \quad f(t,v) = f(t,\cdot,v(\cdot)),$$
$$g(u) = \int\limits_{\Omega} k(\cdot,y)u(0,y)dy, \quad h(u) = \sum_{i=1}^{n} C_i u(t_i,\cdot).$$

Khi đó, bài toán (4.1)-(4.4) có dạng tổng quát sau đây:

$$u_{tt}(t) + \rho\mathcal{A}u_t(t) + \mathcal{A}^2u(t) = f(t,u(t)), \quad t > 0 \tag{4.5}$$
$$u(0) + g(u) = x_0, \quad u_t(0) + h(u) = y_0, \tag{4.6}$$

2. Bây giờ ta xét bài toán (4.1)-(4.4) đối với miền Ω bị chặn trong $\mathbb{R}^2$ với biên $\partial\Omega$ chứa gốc $x = 0$ và nó là trơn trừ điểm $x = 0$. Trong lân cận điểm gốc $x = 0$, miền Ω trùng với góc $C_\omega = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) : \ r > 0, 0 < \theta < \omega\}$ với độ mở $\omega \in (0,\pi)$. Sử dụng các ký hiệu và kết quả trong [61], ta thấy tập $\Lambda = \left\{ \pm \frac{k\pi}{\omega}, k \in \mathbb{N}^* \right\}$ là tập cực điểm của toán tử $L(\lambda) = L(\omega, r\partial r, D\omega) = r^2\Delta, r = |x|, \omega = \frac{x}{|x|}$ (xem [51, 6.1.8. Ví dụ, trang 209]). Do đó tập hợp $\Lambda_0 = \{\lambda \in \Lambda : \ \text{Re}\,\lambda \in [0,1]\} = \emptyset$. Áp dụng [61, Định lý 3.1], toán tử $-A = \Delta$ có miền xác định

$$\mathcal{D}(-A) = \{u \in \mathring{H}^1(\Omega) : \ \Delta u \in L_2(\Omega)\} = H_0^2(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega).$$

Với mỗi $\lambda > 0$, ta xét bài toán

$$\begin{cases} \lambda u(x) - \Delta u(x) = f(x), \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{4.7}$$

ở đây $u \in \mathcal{D}(-\mathcal{A})$ là hàm chưa biết, $f \in L_2(\Omega) = H_0^0(\Omega)$ đã cho. Lập luận tương tự như Ví dụ 1.3, Bài toán (4.7) có duy nhất nghiệm $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$.

Áp dụng [61, Định lý 2.5] đối với $l = \beta = \gamma = 0, m = 1, n = 2$ và $f \in L_2(\Omega) = H_0^0(\Omega)$ và trên đường thẳng thực Re $\lambda = 1$ không chứa điểm kỳ dị của $L(\lambda)$ thì nghiệm $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ của bài toán (4.7) thuộc $H_0^2(\Omega)$. Bởi kết quả này ta kết luận được rằng với mỗi $f \in H_0^0(\Omega) = L_2(\Omega)$, bài toán (4.7) có duy nhất nghiệm $u \in \mathcal{D}(-\mathcal{A})$.

Tiếp tục lập luận tương tự như Ví dụ 1.3 ta thu được $-\mathcal{A} = \Delta$ sinh ra C_0-nửa nhóm giải tích $\{T(t)_{t\geq 0}\}$ trên $X = H_0^0(\Omega) = L_2(\Omega)$. Do đó ta có

$\{T(t)\}_{t\geq 0}$ là nửa nhóm liên tục chuẩn và ổn định mũ. Bài toán (4.1)-(4.4) cũng đưa được về bài toán (4.5), (4.6).

Từ phân tích trên, ta xét bài toán trừu tượng sau.

4.1.2. Bài toán

Cho $(X, \|\cdot\|)$ là không gian Banach, ta xét bài toán hệ đàn hồi với cấu trúc tắt dần gồm các điều kiện không địa phương có dạng sau

$$u_{tt}(t) + \rho\mathcal{A}u_t(t) + \mathcal{A}^2u(t) = f(t, u(t)), \quad t > 0 \tag{4.8}$$

$$u(0) + g(u) = x_0, \quad u_t(0) + h(u) = y_0, \tag{4.9}$$

ở đây $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset X \longrightarrow X$ là toán tử tuyến tính đóng, $\rho \geq 2$ là hằng số đã cho, $x_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), y_0 \in X$ và g, h, f là các hàm đã cho, chúng sẽ được giải thích rõ ràng trong phần sau.

Bây giờ ta xây dựng định nghĩa nghiệm mềm của bài toán (4.8)−(4.9). Trước hết đối với hệ đàn hồi tuyến tính với cấu trúc tắt dần

$$\begin{aligned} &u_{tt} + \rho\mathcal{A}u_t(t) + \mathcal{A}^2u(t) = h(t),\ 0 < t < T \\ &u(0) = x_0 \quad u_t(0) = y_0, \end{aligned} \tag{4.10}$$

trên không gian Banach X, ở đây $h:\ [0, T] \to X$. Ta xét phân tích sau

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sigma_1\mathcal{A}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sigma_2\mathcal{A}\right)u = h(t)$$

tương đương

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (\sigma_1 + \sigma_2)\mathcal{A}\frac{\partial u}{\partial t} + \sigma_1\sigma_2\mathcal{A}^2u = h(t). \tag{4.11}$$

Phương trình (4.10) đồng nhất (4.11) nếu $\sigma_1 + \sigma_2 = \rho,\ \sigma_1\sigma_2 = 1$. Từ giả thiết $\rho \geq 2$, hệ phương trình trên luôn xác định nghiệm σ_1, σ_2, cụ thể như sau

(i) Nếu $\rho > 2$, thì $\sigma_1 = \dfrac{\rho + \sqrt{\rho^2 - 4}}{2}, \sigma_2 = \dfrac{\rho - \sqrt{\rho^2 - 4}}{2}$.

(ii) Nếu $\rho = 2$, thì $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$.

Đặt $\dfrac{\partial u}{\partial t} + \sigma_2\mathcal{A}u = v(t),\ 0 \leq t \leq T$, thì $v_0 := v(0) = y_0 + \sigma_2\mathcal{A}(x_0)$. Khi đó

từ bài toán (4.10) ta có hai bài toán Cauchy trong không gian X như sau

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + \sigma_1 \mathcal{A} v = h(t), \quad 0 < t < T, \\ v(0) = v_0, \end{cases} \tag{4.12}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \sigma_2 \mathcal{A} u = v(t), \quad 0 < t < T, \\ u(0) = x_0 \end{cases} \tag{4.13}$$

Rõ ràng (4.12), (4.13) là các bài toán giá trị biên không đồng nhất. Từ giả thiết $-\mathcal{A}$ sinh ra C_0-nửa nhóm $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, ta có $-\sigma_1\mathcal{A}, -\sigma_2\mathcal{A}$ tương ứng là các phần tử sinh ra C_0-nửa nhóm $\{S_1(t)\}_{t\geq 0}, \{S_2(t)\}_{t\geq 0}$ trên $X, S_1(t) = T(\sigma_1 t), S_2(t) = T(\sigma_2 t),\ t \geq 0$. Áp dụng kết quả trong [63, Mục 4.2], với giả thiết $h \in L_1\big(0, T; X\big)$, bài toán giá trị biên tuyến tính (4.12) có nghiệm mềm v biểu diễn bởi hệ thức

$$v(s) = S_1(s)v_0 + \int_0^s S_1(s-\tau)h(\tau)d\tau. \tag{4.14}$$

Tương tự, nếu $v \in C\big([0,T]; X\big)$ thì bài toán giá trị ban đầu tuyến tính (4.13) có nghiệm mềm u biểu diễn bởi hệ thức

$$u(t) = S_2(t)(x_0) + \int_0^t S_2(t-s)v(s)ds. \tag{4.15}$$

Kết hợp (4.14) và (4.15), ta có

$$u(t) = S_2(t)(x_0) + \int_0^t S_2(t-s)S_1(s)v_0 ds$$
$$+ \int_0^t \int_0^s S_2(t-s)S_1(s-\tau)h(\tau)d\tau ds.$$

Trên cơ sở lập luận như trên, ta có định nghĩa nghiệm mềm của bài toán (4.8)−(4.9) như sau:

Định nghĩa 4.1. Một hàm $u \in C([0,T]; X)$ được gọi là nghiệm mềm của

bài toán (4.8)−(4.9) trên $[0,T]$ nếu

$$u(t) = S_2(t)\big(x_0 - g(u)\big) + \int_0^t S_2(t-s)S_1(s)v_0 ds$$
$$+ \int_0^t \int_0^s S_2(t-s)S_1(s-\tau)f\big(\tau, u(\tau)\big)d\tau ds, \quad (4.16)$$

với bất kỳ $t \in [0,T]$, ở đây $v_0 = y_0 - h(u) + \sigma_2\mathcal{A}\big(x_0 - g(u)\big)$.

4.2. Sự tồn tại nghiệm mềm của bài toán

Trong mục này, ta khẳng định sự tồn tại nghiệm mềm của bài toán (4.8)-(4.9) trên $[0,T]$ với $T > 0$ nào đó. Để thực hiện được điều này, ta giả thiết rằng

(A) Toán tử $-\mathcal{A}$ sinh ra C_0-nửa nhóm liên tục chuẩn $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ trên không gian Banach X. Bởi giả thiết này, $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ với chuẩn graph

$$\|z\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = \|z\| + \|\mathcal{A}z\|,$$

trở thành một không gian Banach.

(G) Hàm $g:\ C\big([0,T];X\big) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$ được xác định bởi các điều kiện:

(i) g là hàm liên tục và

$$\|g(u)\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} \leq \theta_g(\|u\|_C),\ \forall u \in C([0,T];X), \quad (4.17)$$

ở đây $\theta_g:\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ là hàm không giảm.

(ii) Tồn tại các hằng số không âm η_g, ξ_g sao cho với mọi tập bị chặn $\Omega \subset C([0,T];X)$,

$$\chi(g(\Omega)) \leq \eta_g\, \chi_T(\Omega), \quad (4.18)$$
$$\chi(\mathcal{A}g(\Omega)) \leq \xi_g\, \chi_T(\Omega). \quad (4.19)$$

(H) Hàm $h:\ C([0,T];X) \longrightarrow X$ thỏa mãn các điều kiện sau

(i) Tồn tại $\theta_h:\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ là hàm liên tục, không giảm sao cho

$$\|h(u)\|_X \leq \theta_h(\|u\|_C),\ \forall u \in C([0,T];X), \quad (4.20)$$

(ii) Tồn tại hằng số dương η_h sao cho

$$\chi\big(h(\Omega)\big) \leq \eta_h\, \chi_T(\Omega), \tag{4.21}$$

với tất cả các tập bị chặn $\Omega \subset C([0,T];X)$.

(F) Hàm phi tuyến $f:\ \mathbb{R}^+ \times X \longrightarrow X$ thỏa mãn

(i) $f\big(\cdot, v\big)$ là hàm đo được đối với mỗi $v \in X$, $f(t,\cdot)$ liên tục hầu khắp đối với $t \in [0,T]$ và

$$\|f\big(t,v\big)\|_X \leq m(t)\theta_f(\|v\|_X), \tag{4.22}$$

với tất cả $v \in X, t \in [0,T]$, ở đây $m \in L_1([0,T]), \theta_f:\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ là hàm liên tục, không giảm.

(ii) Nếu $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ không là nửa nhóm compact thì tồn tại hàm $\eta_f:\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn $\eta_f \in L_1(0,T)$ và

$$\chi\big(f(t,\Omega)\big) \leq \eta_f(t)\, \chi_T(\Omega), \tag{4.23}$$

với tất cả các tập bị chặn $\Omega \subset X$.

Nhận xét 4.1. 1) Nếu $f(t,\cdot)$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz, tức là

$$\|f(t,v_1) - f(t,v_2) \leq k_f(t)\|v_1 - v_2\|_X,$$

với hàm $k_f \in L_1(0,T)$ nào đó, thì (4.22) và (4.23) đều thỏa mãn.

2) Nếu g là compact, thì (4.18) thỏa mãn.

Đặt $S_1(t) = T(\sigma_1 t), S_2(t) = T(\sigma_2 t), \sigma_1 + \sigma_2 = \rho, \sigma_1\sigma_2 = 1, 0 < \sigma_1 < \sigma_2$. Ta kí hiệu $B_R = \{u \in C := C([0,T];X):\ \|u\|_C \leq R\}$, ở đây R là số thực dương đã được chọn. Ta thấy rằng B_R là tập con đóng, lồi, bị chặn của $C([0,T];X)$. Ta định nghĩa toán tử nghiệm $F:\ B_R \to C$ như sau:

$$\begin{aligned} F(u)(t) = S_2(t)(x_0 - g(u)) &+ \int_0^t S_2(t-s)S_1(s)v_0 ds \\ &+ \int_0^t \int_0^s S_2(t-s)S_1(s-\tau) f\big(\tau, u(\tau)\big) d\tau ds, \end{aligned} \tag{4.24}$$

với mọi $u \in B_R$ và với mọi $t \in [0,T]$. Ta nhận thấy F là ánh xạ liên tục trên B_R. Thật vậy, với mọi $u \in M$, ta lấy dãy $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M, u_n \to u$ khi $n \to \infty$. Khi đó, bởi tính liên tục của các thành phần tham gia trong F, ta thu được $\{F(u_n)(t)\} \to F(u)(t)$ với mọi $t \in [0,T]$. Bây giờ ta đặt

$$M = \sup_{t\in[0,T]} \|S_2(t)\|_{\mathcal{L}(X)}, \Lambda_T = \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t \|S_2(t-s)S_1(s)\|_{\mathcal{L}(X)} ds,$$

$$\Gamma_T = \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t \int_0^s \|S_2(t-s)S_1(s-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} m(\tau) d\tau ds.$$

$$\Theta_T = \begin{cases} 0, \text{ nếu nửa nhóm } \{T(t)\}_{t\geq 0} \text{ là compact,} \\ \sup\limits_{t\in[0,T]} \int\limits_0^t \int\limits_0^s \|S_2(t-s)S_1(s-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \eta_f(\tau) d\tau ds, \\ \qquad\qquad \text{đối với các trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Bổ đề 4.1. *Giả sử* **(A), (G), (H), (F)** *thỏa mãn và nếu*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\big[M\theta_g(n) + (\theta_h(n) + \sigma_2\theta_g(n))\Lambda_T + \theta_f(n)\Upsilon_T\big] < 1 \qquad (4.25)$$

thì luôn tồn tại số thực dương R để sao cho $F(B_R) \subset B_R$.

Chứng minh. Bằng phản chứng, ta giả thiết tồn tại dãy $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B_R$ sao cho $\|u_n\|_C \leq n$ nhưng $\|F(u_n)\|_C > n$. Từ hệ thức của F, ta có

$$F(u_n)(t) = F_1(u_n)(t) + F_2(u_n)(t) + F_3(u_n)(t),$$

ở đây

$$F_1(v)(t) = S_2(t)(x_0 - g(v));$$

$$F_2(v)(t) = \int_0^t S_2(t-s)S_1(s)\big(y_0 - h(v) + \sigma_2\mathcal{A}(x_0 - g(v))\big)ds;$$

$$F_3(v)(t) = \int_0^t \int_0^s S_2(t-s)S_1(s-\tau)f\big(\tau, v(\tau)\big)d\tau ds.$$

Ta có

$$\|F(u_n)(t)\|_X \leq \|F_1(u_n)(t)\|_X + \|F_2(u_n)(t)\|_X + \|F_3(u_n)(t)\|_X. \qquad (4.26)$$

$$\begin{aligned}\|F_1(u_n)(t)\|_X &\le \|S_2(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\big(\|x_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \|g(u_n)\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}\big)\\ &\le M\big(\|x_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \theta_g(n)\big). \qquad (4.27)\\ \|F_2(u_n)(t)\|_X &\le \int_0^t \|S_2(t-s)S_1(s)\|_{\mathcal{L}(X)}\big(\|y_0\|_X + \|h(u_n)\|_X\\ &\qquad + \sigma_2\|\mathcal{A}x_0\|_X + \sigma_2\|\mathcal{A}g(u_n)\|_X\big)ds\\ &\le \big(\|y_0\|_X + \|h(u_n)\|_X + \sigma_2\|\mathcal{A}x_0\|_X\\ &\qquad + \sigma_2\|\mathcal{A}g(u_n)\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}\big)\Lambda_T\\ &\le \big(\|y_0\|_X + \theta_h(n) + \sigma_2\|\mathcal{A}x_0\|_X + \sigma_2\theta_g(n)\big)\Lambda_T. \qquad (4.28)\\ \|F_3(u_n)(t)\|_X &\le \int_0^t\int_0^s \|S_2(t-s)S_1(s-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)}\|f\big(\tau, u_n(\tau)\big)\|_X d\tau ds\\ &\le \int_0^t\int_0^s \|S_2(t-s)S_1(s-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)}\ m(\tau)\theta_f(\|u_n(t)\|_X)d\tau ds\\ &\le \theta_f(n)\Upsilon_T. \qquad (4.29)\end{aligned}$$

Từ (4.26)-(4.29), ta có

$$\begin{aligned}\|F(u_n)(t)\|_X \le \big(&M\|x_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \|y_0\|_X + \sigma_2\|\mathcal{A}x_0\|_X\big)\\ &+ \big(M\theta_g(n) + (\theta_h(n) + \sigma_2\theta_g(n))\Lambda_T + \theta_f(n)\Upsilon_T\big),\end{aligned}$$

suy ra

$$\begin{aligned}\|F(u_n)\|_C \le \big(&M\|x_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \|y_0\|_X + \sigma_2\|\mathcal{A}x_0\|_X\big)\\ &+ \big(M\theta_g(n) + (\theta_h(n) + \sigma_2\theta_g(n))\Lambda_T + \theta_f(n)\Upsilon_T\big).\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}1 < \frac{1}{n}\|F(u_n)\|_C \le &\frac{1}{n}\big[M\|x_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \|y_0\|_X + \sigma_2\|\mathcal{A}x_0\|_X\big]\\ &+ \frac{1}{n}\big[M\theta_g(n) + (\theta_h(n) + \sigma_2\theta_g(n))\Lambda_T + \theta_f(n)\Upsilon_T\big]. \qquad (4.30)\end{aligned}$$

Từ (4.30), cho $n \to +\infty$, cùng với giả thiết (4.25), ta thu được điều mâu thuẫn. Bổ đề 4.1 được chứng minh. □

Bổ đề 4.2. *Giả sử các giả thiết của Bổ đề 4.1 đều thỏa mãn. Khi đó*

$$\chi_T\big(F(D)\big) \le \Big[M\eta_g + 4\big(\eta_h + \sigma_2\xi_g\big)\Lambda_T + 8\Theta_T\Big]\chi_T(D), \qquad (4.31)$$

với tất cả các tập bị chặn $D \subset B_R$.

Chứng minh. Từ tính chất nửa tuyến tính của χ_T, ta có

$$\chi_T\big(F(D)\big) \le \chi_T\big(F_1(D)\big) + \chi_T\big(F_2(D)\big) + \chi_T\big(F_3(D)\big) \tag{4.32}$$

1. Với mọi $z_1, z_2 \in F_1(D)$, luôn tồn tại $u_1, u_2 \in D$ sao cho với $t \in [0,T]$,

$$z_i(t) = F_1(u_i)(t) = S_2(t)\big(x_0 - g(u_i)\big),\ t \in [0,T],\ i = 1,2.$$

Ta có

$$\|z_1(t) - z_2(t)\|_X = \|S_2(t)g(u_2) - S_2(t)g(u_1)\|_X = \|S_2(t)\big(g(u_2) - g(u_1)\big)\|_X.$$

Suy ra

$$\|z_1 - z_2\|_C \le \|S_2(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\|g(u_2) - g(u_1)\|_X \le M\|g(u_2) - g(u_1)\|_X.$$

Do đó

$$\chi_T\big(F_1(D)\big) \le M\,\chi\big(g(D)\big) \le M\eta_g\,\chi_T(D). \tag{4.33}$$

2. Áp dụng Mệnh đề 1.3, luôn tồn tại dãy $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ sao cho với mọi $\varepsilon > 0$ thì

$$\chi_T\big(F_2(M)\big) \le 2\chi_T\big(\{F_2(u_n)\}_{n=1}^{\infty}\big) + \varepsilon. \tag{4.34}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\chi\big(\{F_2(u_n)(t)\}\big) &\le 2\int_0^t \chi\Big(S_2(t-s)S_1(s)\big(y_0 - h(\{u_n\}) \\
&\qquad\qquad + \sigma_2\mathcal{A}\big(x_0 - g(\{u_n\})\big)\big)\Big)ds \\
&= 2\int_0^t \chi\Big[S_2(t-s)S_1(s)\big(h(\{u_n\}) + \sigma_2\mathcal{A}g(\{u_n\})\big)\Big]ds \\
&\le 2\int_0^t \|S_2(t-s)S_1(s)\|_{\mathcal{L}(X)}\Big(\chi\big(h(\{u_n\})\big) \\
&\qquad\qquad + \sigma_2\chi\big(\mathcal{A}g(\{u_n\})\big)\Big)ds.
\end{aligned}$$

Ta nhận thấy $\{F_2(u_n)\}$ là đồng liên tục. Thật vậy với mọi $\varepsilon > 0$, ta chọn được $\delta := \delta(\varepsilon)$. Khi đó với mọi $t_1, t_2 \in [0,T], |t_2 - t_1| < \delta$ và với mọi

$n \in \mathbb{N}^*$ thì

$$\begin{aligned}
&\|F_2(u_n)(t_2) - F_2(u_n)(t_1)\|_X \\
&= \Big\| \int_0^{t_2} S_2(t_2 - s)S_1(s)v_0\, ds - \int_0^{t_1} S_2(t_1 - s)S_1(s)v_0\, ds \Big\|_X \\
&\le \Big\| \int_0^{t_1} S_2(t_2 - s)S_1(s)v_0\, ds - \int_0^{t_1} S_2(t_1 - s)S_1(s)v_0\, ds \Big\|_X \\
&\qquad\qquad + \Big\| \int_{t_1}^{t_2} S_2(t_2 - s)S_1(s)v_0\, ds \Big\|_X \\
&\le T \sup_{t\in[0,T]} \|S_1(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \|v_0\|_X \int_0^{t_1} \|S_2(t_2 - s) - S_2(t_1 - s)\|_{\mathcal{L}(X)} ds \\
&\quad + \sup_{t\in[0,T]} \|S_2(t - s)\|_{\mathcal{L}(X)} \sup_{s\in[0,T]} \|S_1(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \|v_0\|_X |t_2 - t_1| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Từ tính đồng liên tục của $\{F_2(u_n)\}$ ta thu được

$$\begin{aligned}
\chi_T\big(\{F_2(u_n)\}\big) &\le 2\big(\eta_h\, \chi_T(\{u_n\}) + \sigma_2\xi_g\, \chi_T(\{u_n\})\big)\Lambda_T \\
&\le 2\big(\eta_h + \sigma_2\xi_g\big)\Lambda_T\, \chi_T(D), \qquad (4.35)
\end{aligned}$$

điều này có được là nhờ vào các giả thiết **(G)** và **(H)**. Từ chỗ $\varepsilon > 0$ là tùy ý, từ (4.34) và (4.35) ta có

$$\chi_T\big(F_2(D)\big) \le 4\big(\eta_h + \sigma_2\xi_g\big)\Lambda_T\, \chi_T(D). \qquad (4.36)$$

3. Áp dụng Mệnh đề 1.3 thêm một lần nữa, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại dãy $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ sao cho

$$\chi_T\big(F_3(M)\big) \le 2\chi_T\big(\{F_3(u_n)\}_{n=1}^{\infty}\big) + \varepsilon. \qquad (4.37)$$

Ta có

$$\chi\big(\{F_3(u_n)(t)\}\big) \le 4 \int_0^t \int_0^s \chi\big(S_2(t - s)S_1(s - \tau)f(\tau, \{u_n(\tau)\})\big) d\tau ds.$$

Nếu $\{T(t)\}_{t\ge 0}$ là nửa nhóm compact, thì $\{S_2(t)\}_{t\ge 0}$ cũng là nửa nhóm compact. Khi đó

$$\chi\big(S_2(t - s)S_1(s - \tau)f\big(\tau, \{u_n(\tau)\}\big)\big) = 0 \quad \text{với hầu khắp } \tau \in [0, T].$$

Trong trường hợp này, ta thu được $\chi\big(\{F_3(u_n)(t)\}\big) = 0$. Trong các trường hợp còn lại, ta có

$$\begin{aligned}\chi\big(\{F_3(u_n)(t)\}\big) &\leq 4\int_0^t\int_0^s \|S_2(t-s)S_1(s-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)}\chi\big(f(\tau,\{u_n(\tau)\})\big)d\tau ds\\ &\leq 4\int_0^t\int_0^s \|S_2(t-s)S_1(s-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)}\eta_f(\tau)\chi\big(\{u_n(\tau)\}\big)d\tau ds.\end{aligned}$$

Chứng minh tương tự như trên, ta có $\{F_3(u_n)(t)\}$ là đồng liên tục. Khi đó

$$\chi_T\big(\{F_3(u_n)\}\big) \leq 4\Theta_T\chi_T(D). \tag{4.38}$$

Từ (4.37) và (4.38) ta có

$$\chi_T\big(F_3(M)\big) \leq 8\Theta_T\chi_T(D). \tag{4.39}$$

Từ (4.32), (4.33), (4.36) và (4.39), ta thu được

$$\chi_T\big(F(D)\big) \leq \Big[M\eta_g + 4(\eta_h + \sigma_2\xi_g)|\Lambda_T + 8\Theta_T\Big]\chi_T(D). \tag{4.40}$$

Bổ đề 4.2 được chứng minh. □

Định lý 4.1. *Giả sử các giả thiết của Bổ đề 4.2 được thỏa mãn và*

$$l := M\eta_g + 4(\eta_h + \sigma_2\xi_g)|\Lambda_T + 8\Theta_T < 1. \tag{4.41}$$

Khi đó bài toán (4.8)-(4.9) có ít nhất một nghiệm trên $[0, T]$.

Chứng minh. Bởi giả thiết (4.41), toán tử nghiệm F là χ_T- nén. Thực vậy, nếu $D \subset B_R$ là tập bị chặn thỏa mãn $\chi_T(D) \leq \chi_T\big(F(D)\big)$, áp dụng Bổ đề 4.2, ta thu được

$$\chi_T(D) \leq \chi_T\big(F(D)\big) \leq l\chi_T(D).$$

Do đó $\chi_T(D) = 0$, nên D là compact tương đối.

Bởi các giả thiết của Bổ đề 4.1 nên ta có $F(B_R) \subset B_R$ và F liên tục. Tiếp tục áp dụng Định lý 1.15, ánh xạ nghiệm F xác định bởi (4.24) có tập điểm bất động $Fix(F)$ là compact, khác tập $\emptyset$. Điều này chứng tỏ rằng bài toán (4.8)−(4.9) có nghiệm $u(t)$ biểu diễn bởi (4.16). □

4.3. Sự tồn tại nghiệm mềm phân rã của bài toán

Trong mục này, chúng ta xét toán tử nghiệm F trên tập sau:

$$BC_R^\gamma(\beta) = B_R \cap \big\{v \in BC(\mathbb{R}^+; X) : \sup_{t\in\mathbb{R}^+} e^{\gamma t}\|v(t)\|_X \le \beta\big\},$$

ở đây B_R là hình cầu đóng trong $BC(\mathbb{R}^+; X)$ có tâm tại gốc, bán kính $R; \beta$ và γ là các số thực dương sẽ được lựa chọn sau. Ta nhận thấy $BC_R^\gamma(\beta)$ là tập con lồi, đóng, bị chặn trong $BC(\mathbb{R}^+; X)$. Trên $BC_R^\gamma(\beta)$ chúng ta sử dụng độ đo không compact χ^* được xác định bởi (1.21). Ta sẽ chứng minh $F\big(BC_R^\gamma(\beta)\big) \subset BC_R^\gamma(\beta)$ và F là χ^*-ánh xạ nén trên $BC_R^\gamma(\beta)$. Trong các giả thiết **(A), (G), (H), (F)**, chúng ta thay thế bởi giả thiết tương ứng mạnh hơn, đó là:

($\mathbf{A}^*$) Toán tử $-\mathcal{A}$ là phần tử sinh của C_0-nửa nhóm liên tục chuẩn $\{T(t)\}_{t\ge0}$ sao cho $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \le Ce^{-\delta t},\ t \ge 0$, ở đây C, δ là các hằng số dương.

($\mathbf{G}^*$) Giả thiết **(G)** thỏa mãn với bất kỳ $T > 0$.

($\mathbf{H}^*$) Giả thiết **(H)** thỏa mãn với bất kỳ $T > 0$.

($\mathbf{F}^*$) Giả thiết **(F)** thỏa mãn với $\theta_f(r) = r,\ \eta_f \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$ và $m \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ sao cho

$$K = \sup_{s\ge0} \int_0^s e^{-(\delta\sigma_1-\gamma)(s-\tau)} m(\tau)d\tau < +\infty.$$

Ta đặt

$$M_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|S_2(t)\|_{\mathcal{L}(X)}, \Lambda_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \int_0^t \|S_2(t-s)S_1(s)\|_{\mathcal{L}(X)}ds,$$

$$\Gamma_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \int_0^t \int_0^s \|S_2(t-s)S_1(s-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} m(\tau)d\tau ds.$$

$$\Theta_\infty = \begin{cases} 0, \text{ nếu nửa nhóm } \{T(t)\}_{t\ge0} \text{ là compact,} \\ \sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+} \int\limits_0^t \int\limits_0^s \|S_2(t-s)S_1(s-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \eta_f(\tau)d\tau ds, \\ \qquad\qquad \text{đối với các trường hợp khác.} \end{cases}$$

Trong các phát biểu và chứng minh dưới đây, ta luôn chọn $\gamma \in (0, \delta\sigma_1]$ là cố định.

Bổ đề 4.3. *Với các giả thiết* **(A*), (G*), (H*), (F*)** *và nếu*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big[M_\infty \theta_g(n) + \big(\theta_h(n) + \sigma_2\theta_g(n)\big)\Lambda_\infty\Big] + \Gamma_\infty < 1, \tag{4.42}$$

$$\text{và} \quad \frac{KC^2}{\delta\sigma_2 - \gamma} < 1 \tag{4.43}$$

thì tồn tại các số dương R, β sao cho $F\big(BC_R^\gamma(\beta)\big) \subset BC_R^\gamma(\beta)$.

Chứng minh. 1. Trước hết, ta chứng minh sự tồn tại của B_R sao cho $F(B_R) \subset B_R$. Thật vậy, giả sử ngược lại rằng với mỗi $n \in \mathbb{N}$, tồn tại $u_n \in B_n$ thỏa mãn $\|u_n\|_\infty \le n$ nhưng $\|F(u_n)\|_\infty > n$. Lập luận như Bổ đề 4.1, ta có

$$\|F_1(u_n)(t)\|_X \le M_\infty\big(\|x_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \theta_g(n)\big) \tag{4.44}$$

$$\|F_2(u_n)(t)\|_X \le \big(\|y_0\|_X + \theta_h(n) + \sigma_2\|\mathcal{A}x_0\|_X + \sigma_2\theta_g(n)\big)\Lambda_\infty. \tag{4.45}$$

$$\|F_3(u_n)(t)\|_X \le n\Gamma_\infty. \tag{4.46}$$

Từ (4.44), (4.45) và (4.46), ta thu được

$$\begin{aligned}\|F(u_n)(t)\|_X \le \big[M_\infty\|x_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \|y_0\|_X + \sigma_2\|\mathcal{A}x_0\|_X\big] \\ + \big[M_\infty\theta_g(n) + \big(\theta_h(n) + \sigma_2\theta_g(n)\big)\Lambda_\infty + n\Gamma_\infty\big],\end{aligned}$$

với mỗi $t \ge 0$. Do đó

$$\begin{aligned}1 < \frac{1}{n}\|F(u_n)\|_\infty \le \frac{1}{n}\big[M_\infty\|x_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \|y_0\|_X + \sigma_2\|\mathcal{A}x_0\|_X\big] \\ + \frac{1}{n}\big[M_\infty\theta_g(n) + \big(\theta_h(n) + \sigma_2\theta_g(n)\big)\Lambda_\infty + n\Gamma_\infty\big]\end{aligned} \tag{4.47}$$

Qua giới hạn khi $n \to \infty$, ta thu được điều mẫu thuẫn với (4.42).

2. Tiếp theo, ta chứng minh tồn tại $\beta > 0$ sao cho $F\big(BC_R^\gamma(\beta)\big) \subset BC_R^\gamma(\beta)$. Thực vậy, ta giả sử ngược lại rằng với mỗi $n \in \mathbb{N}$ tồn tại $u_n \in BC_R^\gamma(n)$

(tức là $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+} e^{\gamma t}\|u_n(t)\|_X \le n$) sao cho $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+} e^{\gamma t}\|F(u_n)(t)\|_X > n$. Khi đó

$$\begin{aligned}
e^{\gamma t}\|F_1(u_n)(t)\|_X &\le e^{\gamma t}\|S_2(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\big(\|x_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \|g(u_n)\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}\big)\\
&\le e^{\gamma t}\|S_2(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\big(\|x_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \theta_g(\|u_n\|_\infty)\big)\\
&\le \frac{C}{e^{(\delta\sigma_2-\gamma)t}}\big[\|x_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \theta_g(R)\big]\\
&\le C\big[\|x_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \theta_g(R)\big]. \qquad (4.48)\\
e^{\gamma t}\|F_2(u_n)(t)\|_X &\le e^{\gamma t}\int\limits_0^t \|S_2(t-s)S_1(s)\|_{\mathcal{L}(X)}\big(\|y_0\|_X + \|h(u_n)\|_X\\
&\qquad + \sigma_2\|\mathcal{A}x_0\|_X + \sigma_2\|\mathcal{A}g(u_n)\|_X\big)ds\\
&\le C\big[\|y_0\|_X + \theta_h(\|u_n\|_\infty) + \sigma_2\|\mathcal{A}x_0\|_X\\
&\qquad + \sigma_2\theta_g(\|u_n\|_\infty)\big]e^{(\gamma-\delta\sigma_2)t}\int\limits_0^t e^{\delta(\sigma_2-\sigma_1)s}ds\\
&\le C_1\big[\|y_0\|_X + \theta_h(R) + \sigma_2\|\mathcal{A}x_0\|_X + \sigma_2\theta_g(R)\big], \qquad (4.49)
\end{aligned}$$

với mọi $t \ge 0$, điều này có được là do $u_n \in BC_R^\gamma(n)$. Ở đây C_1 là hằng số dương độc lập với u_n.

$$\begin{aligned}
e^{\gamma t}\|F_3(u_n)(t)\|_X &\le e^{\gamma t}\int\limits_0^t\int\limits_0^s \|S_2(t-s)S_1(s-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)}\|f(\tau,u_n(\tau))\|_X d\tau ds\\
&\le C^2e^{\gamma t}\int\limits_0^t\int\limits_0^s e^{-\delta\sigma_2(t-s)}e^{-\delta\sigma_1(s-\tau)}m(\tau)\|u_n(\tau)\|_X d\tau ds\\
&\le nC^2e^{\gamma t}\int\limits_0^t e^{-\delta\sigma_2(t-s)}\Big(\int\limits_0^s e^{-\delta\sigma_1(s-\tau)-\gamma\tau}m(\tau)d\tau\Big)ds,
\end{aligned}$$

ta thấy rằng

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^s e^{-\delta\sigma_1(s-\tau)-\gamma\tau}m(\tau)d\tau &= \int\limits_0^s e^{-\delta\sigma_1(s-\tau)+\gamma(s-\tau)}e^{-\gamma s}m(\tau)d\tau\\
&= e^{-\gamma s}\int\limits_0^s e^{-(\delta\sigma_1-\gamma)(s-\tau)}m(\tau)d\tau \le Ke^{-\gamma s},
\end{aligned}$$

điều này có được là nhờ $\gamma \leq \delta\sigma_1$. Do đó

$$e^{\gamma t}\|F_3(u_n)(t)\|_X \leq nC^2Ke^{\gamma t}\int\limits_0^t e^{-\delta\sigma_2(t-s)-\gamma s}ds \leq \frac{nKC^2}{\delta\sigma_2-\gamma}. \tag{4.50}$$

Từ (4.48)-(4.50), ta có

$$\begin{aligned} e^{\gamma t}\|F(u_n)(t)\|_X \leq C_2\big[&\|x_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \|y_0\|_X + \sigma_2\|\mathcal{A}x_0\|_X \\ &+ (1+\sigma_2)\theta_g(R) + \theta_h(R)\big] + \frac{nKC^2}{\delta\sigma_2-\gamma}, \end{aligned}$$

với $\forall u_n \in BC_R^\gamma(n)$ và $\forall t \geq 0$, ở đây $C_2 = \max\{C, C_1\}$. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} 1 < \frac{1}{n}\sup_{t\geq 0} e^{\gamma t}\|F(u_n)(t)\|_X \leq \frac{C_2}{n}\big[&\|x_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \|y_0\|_X + \sigma_2\|\mathcal{A}x_0\|_X \\ &+ (1+\sigma_2)\theta_g(R) + \theta_h(R)\big] + \frac{KC^2}{\delta\sigma_2-\gamma}. \end{aligned}$$

Qua giới hạn khi $n \to \infty$ ta thu được điều mâu thuẫn với (4.43). □

Bổ đề 4.4. *Giả sử* **(A*), (G*), (H*), (F*)** *thỏa mãn. Khi đó ta luôn có*

$$\chi^*\big(F(D)\big) \leq \Big[M_\infty\eta_g + 4\big(\eta_h + \sigma_2\xi_g\big)\Lambda_\infty + 8\Theta_\infty\Big]\chi^*(D), \tag{4.51}$$

với tất cả các tập bị chặn $D \subset BC_R^\gamma(\beta)$.

Chứng minh. Cho $D \subset M_\infty$ là tập bị chặn bất kỳ. Ta có

$$\chi^*\big(F(D)\big) = \chi_\infty\big(F(D)\big) + d_\infty\big(F(D)\big). \tag{4.52}$$

1. Trước hết, ta có

$$\chi_\infty\big(F(D)\big) \leq \chi_\infty\big(F_1(D)\big) + \chi_\infty\big(F_2(D)\big) + \chi_\infty\big(F_3(D)\big). \tag{4.53}$$

Nhờ Bổ đề 4.2, ta thu được các đánh giá sau

$$\chi_\infty\big(F_1(D)\big) \leq M_\infty\eta_g\chi_\infty(D), \tag{4.54}$$
$$\chi_\infty\big(F_2(D)\big) \leq 4(\eta_h + \sigma_2\xi_g)\Lambda_\infty\chi_\infty(D), \tag{4.55}$$
$$\chi_\infty\big(F_3(D)\big) \leq 8\Theta_\infty\chi_\infty(D). \tag{4.56}$$

Từ (4.53)−(4.56), ta có

$$\chi_\infty\big(F(D)\big) \leq \big[M_\infty\eta_g + 4\big(\eta_h + \sigma_2\xi_g\big)\Lambda_\infty + 8\Theta_\infty\big]\chi_\infty(D). \tag{4.57}$$

2. Bây giờ ta lấy $D \subset BC_R^\gamma(\beta)$ là một tập con bị chặn. Khi đó với tất cả $u \in D$, ta có

$$e^{\gamma t}\|F(u)(t)\|_X \le \beta \quad \text{khi } t \to \infty.$$

Điều này kéo theo $\|F(u)(t)\|_X \le \beta e^{-\gamma t}$, $\forall\, u \in D$ và với t đủ lớn. Điều này tương đương với T đủ lớn, ta có $d_T\big(F(D)\big) \le \beta e^{-\gamma T}$. Do đó

$$d_\infty\big(F(D)\big) = \lim_{T\to\infty} d_T\big(F(D)\big) = 0. \tag{4.58}$$

Từ (4.52), (4.57) và (4.58), ta có kết luận của bổ đề. □

Định lý 4.2. *Giả sử các giả thiết của Bổ đề 4.3 thỏa mãn và*

$$l_\infty := M_\infty \eta_g + 4\big(\eta_h + \sigma_2\xi_g)\Lambda_\infty\big) + 8\Theta_\infty < 1. \tag{4.59}$$

Khi đó bài toán (4.8), (4.9) có ít nhất một nghiệm mềm xác định trên $\mathbb{R}^+$ *thỏa mãn* $e^{\gamma t}\|u(t)\|_X = O(1)$ *khi* $t \to +\infty$.

Chứng minh. Bởi giả thiết (4.59), toán tử nghiệm F là χ^*- nén. Thực vậy, nếu $D \subset BC_R^\gamma(\beta)$ là tập bị chặn thỏa mãn $\chi^*(D) \le \chi^*\big(F(D)\big)$, khi đó theo Bổ đề 4.4, ta thu được $\chi^*(D) \le \chi^*\big(F(D)\big) \le l_\infty \chi^*(D)$. Do đó $\chi^*(D) = 0$, nên D là compact tương đối.

Theo Bổ đề 4.3, $F\big(BC_R^\gamma(\beta)\big) \subset BC_R^\gamma(\beta)$ và F liên tục. Áp dụng Định lý 1.15, ánh xạ F xác định bởi (4.24) có tập điểm bất động $Fix(F) \subset BC_R^\gamma(\beta)$ là compact, khác tập $\emptyset$. Điều này chứng tỏ rằng bài toán (4.8), (4.9) có nghiệm $u(t)$ biểu diễn bởi (4.16) thỏa mãn $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = 0$. □

Để minh họa cho sự tồn tại nghiệm mềm phân rã theo tốc độ mũ của bài toán tổng quát, ta quay lại xét bài toán (4.1)−(4.4). Như đã nêu trong Ví dụ ở mục Mở đầu, ta xét biên $\partial\Omega$ theo hai trường hợp sau:

1. Miền $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ có biên $\partial\Omega$ đủ trơn. Khi đó với $X = L^2(\Omega), -\mathcal{A} = \Delta_x$ có miền xác định $\mathring{H}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ sinh ra C_0-nửa nhóm $\{T(t)\}_{t\ge 0}$ giải tích, compact, ổn định mũ, $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \le e^{-\lambda_1 t}$, với $\lambda_1 > 0$ là giá trị riêng đầu tiên của $-\mathcal{A}$. Do đó $\{T(t)\}_{t\ge 0}$ là C_0-nửa nhóm liên tục chuẩn. Ta nhắc lại các kí hiệu sau:

$$u(t) = u(t,\cdot), \quad f(t,v) = f(t,\cdot,v(\cdot)),$$
$$g(u) = \int\limits_\Omega k(\cdot,y)u(0,y)dy, \quad h(u) = \sum_{i=1}^n C_i u(t_i,\cdot).$$

Ta xét hàm phi tuyến f, giả thiết rằng tồn tại hàm $m \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ sao cho $|f(t,x,z)| \le m(t)|z|,\ \forall\,(t,x,z) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}$. Khi đó ta có $\|f(t,v)\|_X \le m(t)\|v\|_X,\ \forall\, v \in X$. Chú ý rằng toán tử

$$G(v) = \int\limits_{\Omega} k(\cdot,y)v(y)dy$$

là toán tử kiểu Hilbert-Schmidt trên $L_2(\Omega)$, nên nó là toán tử compact. Điều này áp dụng cho ánh xạ g xác định bởi $g(u) = G\big(u(0,\cdot)\big)$ cũng là toán tử compact. Tương tự, ta có $\mathcal{A}g$ là ánh xạ compact. Vì vậy điều kiện $(\mathbf{G}^*)(ii)$ là thỏa mãn với $\eta_g = \xi_g = 0$. Thêm nữa, ta thấy rằng

$$\|g(u)\|_X \le \|k\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}\|u(0,\cdot)\|_X \le \|k\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}\|u(0,\cdot)\|_C.$$

Do đó $(\mathbf{G}^*)(i)$ thỏa mãn. Tiếp tục, xét các điều kiện đối với hàm h, ta có

$$\|h(u_1) - h(u_2)\|_X \le \sum_{i=1}^{N} C_i\|u_1(t_i,\cdot) - u_2(t_i,\cdot)\|_X \le \Big(\sum_{i=1}^{N} C_i\Big)\|u_1 - u_2\|_C.$$

Khi đó $\chi\big(h(\Omega)\big) \le \Big(\sum\limits_{i=1}^{N} C_i\Big)\chi_\infty(\Omega)$, với mọi tập bị chặn $D \subset BC(\mathbb{R}^+;X)$. Điều này cho thấy giả thiết $(\mathbf{H}^*)(ii)$ thỏa mãn, ở đây $\eta_h = \sum\limits_{i=1}^{N} C_i$. Thêm nữa, ta có đánh giá

$$\|h(u)\|_X \le \Big(\sum_{i=1}^{N} C_i\Big)\|u(t_i,\cdot)\|_X \le \Big(\sum_{i=1}^{N} C_i\Big)\|u\|_\infty,\ \forall\, u \in BC(\mathbb{R}^+;X).$$

Điều này cho thấy giả thiết $(\mathbf{H}^*)(i)$ là thỏa mãn.

Bởi các kết quả thu được ở trên, qua tính toán, ta có

$$M_\infty = 1,\ \Theta_\infty = 0,\ \Lambda_\infty \le \big(\lambda_1(\sigma_2 - \sigma_1)\big)^{-1}, \theta_g(r) = \|k\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}r,$$
$$K = \sup_{t\ge 0}\int\limits_0^t e^{-(\lambda_1\sigma_1-\gamma)(t-\tau)}m(\tau)d\tau,\ \theta_h(r) = \Big(\sum_{i=1}^{N} C_i)\Big)r.$$

Áp dụng Định lý 4.2, bài toán (4.1)−(4.4) có ít nhất một nghiệm $u \in BC\big(\mathbb{R}^+;L^2(\Omega)\big)$ thỏa mãn $e^{\gamma t}\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} = O(1)$ khi $t \to +\infty$ xác định

bởi các điều kiện

$$\begin{cases} K < \lambda_1\sigma_2 - \gamma, \\ \|k\|_{L^2(\Omega\times\Omega)} + \Big(\sum\limits_{i=1}^{N} C_i + \sigma_2\|k\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}\Big)\big[\lambda_1(\sigma_2-\sigma_1)\big]^{-1} + \Gamma_\infty < 1. \end{cases}$$

2. Ta xét bài toán (4.1)-(4.4) trên miền $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ bị chặn với biên $\partial\Omega$ trơn trừ điểm gốc $x = 0$, các hàm g, h được xét như trên. Tuy nhiên đối với hàm f, ta giả sử như sau:

Cho $\hat{f}_1 :\ \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \mu : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ và $\hat{f}_2 : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho

(a) $\hat{f}_1$ là hàm liên tục thỏa mãn $\hat{f}(t, x, 0) = 0$ và

$$\big|\hat{f}_1(t, x, z_1) - \hat{f}_1(t, x, z_2)\big| \le m_1(t)|z_1 - z_2|$$

với tất cả $x \in \Omega, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, ở đây $m_1 \in L_2(\mathbb{R}^+)$ hoặc m_1 là hằng số;

(b) $\mu \in BC\big(\mathbb{R}^+, L_2(\Omega)\big)$;

(c) $\hat{f}_2$ là hàm liên tục và $|\hat{f}_2(x, z)| \le l(x)|z|$ với $l \in L_2(\Omega)$.

Hàm $f : \mathbb{R}^+ \times X \to X$ thỏa mãn $f(x, t, v) = f_1(t, v)(x) + f_2(t, v)(x)$, với

$$f_1(t, v)(x) = \hat{f}_1(t, x, v(x)); \quad f_2(t, v)(x) = \mu(t, x)\int\limits_{\Omega} \hat{f}_2(x, v(x))dx.$$

Xét f_1, ta có $\|f_1(s, v_1) - f_1(s, v_2)\| \le m_1(s)\|v_1 - v_2\|$. Điều này đưa đến

$$\chi\big(f_1(s, D)\big) \le m_1(s)\chi(D) \tag{4.60}$$

với tất cả các tập bị chặn $D \subset X$.

Xét f_2, sử dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\begin{aligned} \|f_2(t, v)\|_X^2 &\le \|\mu(t)|_X^2\Big(\int\limits_{\Omega} \hat{f}_2\big(x, v(x)\big)dx\Big)^2 \\ &\le \|\mu(t)\|_X^2\Big(\int\limits_{\Omega} |l(x)||v(x)|dx\Big)^2 \\ &\le \|\mu(t)\|_X^2\|l\|_X^2\|v\|_X^2. \end{aligned}$$

Mặt khác, với bất kỳ $D \subset X$, ta thấy rằng $f_2(s, D) \subset \{\lambda\mu(s, \cdot) : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Điều này đưa đến $f_2(s, D)$ nằm trong không gian con một chiều của X.

Do đó

$$\chi\big(f_2(t,V)\big) = 0, \tag{4.61}$$

với $t \in \mathbb{R}^+$. Từ (4.60) và (4.61), ta thu được

$$\chi\big(f(s,D)\big) \le \chi\big(f_1(s,D)\big) + \chi\big(f_2(s,D)\big) \le m_1(s)\chi(D)$$

với mọi tập bị chặn $D \subset X$. Như vậy, $\eta_f(t) = m_1(t)$. Thêm nữa, ta có

$$\|f(\cdot,t,v)\|_X \le \|f_1(t,v)\|_X + \|f_2(t,v)\|_X \le \big(m_1(t) + \|\mu(t)\|_X\|l\|_X\big)\|v\|_X.$$

Do đó $m(t) = m_1(t) + \|\mu(t)\|_X\|l\|_X$.

Bởi các kết quả thu được trong ví dụ đã nêu ở mục Mở đầu của chương, lập luận tương tự như trường hợp biên $\partial\Omega$ trơn, ta cũng thu được kết quả

$$M_\infty = 1,\ \Lambda_\infty \le \frac{1}{\lambda_1(\sigma_2-\sigma_1)},\ \theta_g(r) = \|k\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}r,\ \theta_h(r) = \Big(\sum_{i=1}^N C_i)\Big)r,$$

$$K \le \frac{\|m_1\|_{L_2(\mathbb{R})} + 2L}{2\Big(\lambda_1\sigma_1 - \gamma\Big)},\ \Gamma_\infty \le \frac{1}{\lambda_1}\left(\frac{\|m_1\|_{L_2(\mathbb{R}^+)}}{(2\lambda_1\sigma_1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{L}{\sigma_1}\right),$$

ở đó $L = \max\limits_{t\ge 0}\|\mu(t)\|_X\|l\|_X$. Tiếp theo, ta có $\Theta_\infty \le \frac{\|m_1\|_{L_2(\mathbb{R}^+)}}{\lambda_1(2\lambda_1\sigma_2)^{\frac{1}{2}}}$. Áp dụng Định lý 4.2, bài toán (4.1)−(4.4) có ít nhất một nghiệm $u \in BC\big(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)\big)$ thỏa mãn $e^{\gamma t}\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} = O(1)$ khi $t \to +\infty$ xác định bởi các điều kiện

$$\begin{cases} K < \lambda_1\sigma_2 - \gamma, \\ \|k\|_{L^2(\Omega\times\Omega)} + \dfrac{\sum\limits_{i=1}^N C_i + \sigma_2\|k\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}}{\lambda_1(\sigma_2-\sigma_1)} + \Gamma_\infty + 8\Theta_\infty < 1. \end{cases}$$

Kết luận chương 4

Trong chương 4, chúng tôi đã thiết lập được sự tồn tại nghiệm mềm phân rã tốc độ theo cấp mũ của bài toán (4.8), (4.9) và đưa ra được các ví dụ minh họa cho kết quả đạt được đối với phương trình truyền sóng nửa tuyến tính với cấu trúc tắt dần trên miền trơn bất kỳ và miền có điểm góc trong $\mathbb{R}^2$. Kết quả đạt được tổng quát hơn so với cùng kết quả trong [22, 21] trên hai phương diện, thứ nhất là bài toán được xét với điều kiện biên không địa phương, thứ hai là bài toán được xét với lớp hàm phi tuyến rộng hơn.

KẾT LUẬN

1. Kết quả đạt được

1. Sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm yếu trên $[0, +\infty)$ của bài toán giá trị biên ban đầu đối với phương trình hyperbolic nửa tuyến tính cấp cao trong các trụ không trơn.

2. Sự tồn tại duy nhất và biểu diễn tính chính quy của nghiệm yếu trên $[0, T]$ $(0 < T < +\infty)$ theo biến thời gian trong không gian Sobolev có trọng của bài toán Dirichlet-Cauchy đối với phương trình hyperbolic nửa tuyến tính cấp hai trong miền có cạnh, miền nón có cạnh.

3. Sự tồn tại nghiệm mềm phân rã tốc độ theo cấp mũ phương trình truyền sóng nửa tuyến tính với cấu trúc tắt dần cùng điều kiện ban đầu không địa phương, xét với lớp hàm phi tuyến có giá trị trong không gian Banach liên tục bị chặn.

2. Kiến nghị một số vấn đề nghiên cứu tiếp theo

Bên cạnh các kết quả đã đạt được trong luận án, một số vấn đề mở cần tiếp tục nghiên cứu như:

- Biểu diễn tiệm cận của nghiệm của bài toán Dirichlet-Cauchy đối với phương trình hyperbolic phi tuyến trong các miền có cạnh.
- Sự tồn tại duy nhất, tính chính quy, biểu diễn tiệm cận của nghiệm của bài toán Dirichlet-Cauchy đối với phương trình hyperbolic phi tuyến trong miền đa diện.
- Sự tồn tại nghiệm mềm của phương trình truyền sóng có cấu trúc tắt dần với trễ vô hạn cùng điều kiện ban đầu không địa phương.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH ĐÃ CÔNG BỐ CỦA LUẬN ÁN

1. Vu Trong Luong, Nguyen Thanh Tung, "The first initial boundary value problem for nonlinear hyperbolic equations of higher order in cylinders with singular points", International journal of evolution equations 2015, Volume 9, Number 2, pp. 167-180

2. Vu Trong Luong, Nguyen Thanh Tung, "The Dirichlet-Cauchy problem for nonlinear hyperbolic equations in a domain with edges", Nonlinear Analysis 125 (2015) 457-467

3. Vu Trong Luong, Nguyen Thanh Tung, "Decay mild solutions for elastic systems with structural damping involving nonlocal conditions", ISSN 1063-4541, Vestnik St. Petersburg University, Mathematics, 2017, Vol. 50, No. 1, pp. 55-67

Tài liệu tham khảo

[1] R. A. Adams (1975), *Sobolev Spaces,* Academic Press.

[2] A. Aghajani, D. O'Regan, A. Shole Haghighi (2015), "Measure of Noncompactness on $L^p(\mathbb{R}^N)$ and Applications," CUBO A Mathematical Journal, Vol. 17, N.01, (85-97) March 2015.

[3] M. S. Agranovich, M. I. Vishik (1964), "Elliptic Problems with a Paramater and Parabolic Problems of General Form," Usp. Math. Nauk, 39, No. 3, 53-160.

[4] R.R. Akhmerov, M.I. Kamenskii, A.S. Potapov, A.E. Rodkina, B.N. Sadovskii (1992), *Mearures of Noncompactness and Condensing Operator*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin.

[5] N. T. Anh, T. D. Ke (2014), "Decay Integral Solutions for Neutral Fractional Differential Equations with Infinite Delays", Math. Meth. Appl. Sci. Volume 38, Issue 8, Pages 1601–1622.

[6] J. Apell (2005), "Mearures of Noncompactness Condensing Operators and Fixed Points an Application-Oriented Survey", Fixed Point Theory, Volume 6, No. 2, 157-229.

[7] A. A. Balinsky, W. D. Evans (2010), "Some Recent Results on Hardy-Type Inequalities", Applied Mathematics & Information Sciences, **4**(2), pp. 191-208

[8] J. Banaś, L. Olszowy (2009), "On a Class of Measures of Noncompactness in Banach Algebras and Their Application to Nonlinear Integral Equations", Journal for Analysis and its Applications, Volume 28, Issue 4, pp. 475–498.

[9] P. Brenner (1979), "On the Existence of Global Smooth Solutions of Certain Semi-Linear Hyperbolic Equations", Mathematische Zeitschrift, Vol. 167, pp. 99-136.

[10] P. Brenner, W. Wahl (1981), "Global Classical Solutions of Nonlinear Wave Equations", Mathematische Zeitschrift, Vol. 176, Num. 1, pp.87-121.

[11] G. Chen, D. L. Russell (1982), "A Mathematical Model for Linear Elastic Systems with Structural Damping", Quart. Appl. Math. 39 pp.433-454.

[12] E.A. Codington, N. Levison (1955), *Theory of Odinary Differential Equations,* McGraw-Hill, 429p.

[13] S. Coriasco, E. Schrohe, J. Seiler (2001), "Differential Operators on Conic Manifolds: Maximal Regularity and Parabolic Equations", Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol. 70, 4-5-6, 2001, pp. 207-229.

[14] G. Darbo (1955), "Punti Uniti in Trasformazioni a Codominio Non Compatto", Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 24, 84-92.

[15] M. Dauge (1988), *Elliptic Boundary Value Problems on Corner Domains*, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, Berlin.

[16] M. Del Pino, J. Dolbeault (2002), "Best Constants for Gagliardo-Nirenberg Inequalities and Applications to Nonlinear Diffusions", J. Math. Pures Appl. 81 847-875.

[17] S.S. Dragomir (2003), *Some Gronwall Type Inequalities and Applications,* Nova Science Publishers, New York, NY, USA.

[18] K.J. Engel, R. Nagel (2000), *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations,* Springer-Veriag New York, Inc.

[19] L. C. Evans (2010), *Partial Differential Equations,* Second Edition, Graduate Studies in Mathematics, Volume 19, 749pp; Softcover MSC: Primary 35; Secondary 49; 47, American Mathematical Society.

[20] L. C. Evans (1988), "Weak Convergence Methods for Nonlinear Partial Differential Equations," Conference Board of the Mathematical Sciences, Regional conference Series in Mathematics, supported by the National Science Foundation, Number 74.

[21] H. Fan, F. Gao (2014), "Asymptotic Stability of Solutions to Elastic Systems with Structural Damping", Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2014, No. 245 pp.1-9. ISSN: 1072-6691.

[22] H. Fan, Y. Li, P. Chen (2013), "Existence of Mild Solutions for the Elastic Systems with Structural Damping in Banach Spaces", Hindawi Publishing Corporation, Abstract and Applied Analysis, Voulume, Article ID 746893, 6 pages.

[23] H. Fan, Y. Li (2014), "Analyticity and Exponential Stability of Semigroups for the Elastic Systems with Structural Damping in Banach Spaces", J.Math. Anal. Appl. 410 pp.316-322.

[24] G. Fichera (1972), " Existence Theorems in Elasticity in “Flügge’s Encyclopedia of Physics” ", (C. Truesdell, Ed.), Vol. V a/2, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1972.

[25] E. V. Frolova (1994), "An Initial Boundary-Value Problem with a Noncoercive Boundary Condition in Domains with Edges", Zap. Nauchn. Sem. POMI, Boundary-value problems of mathematical, Volume 213, Pages 206–223.

[26] P. Grisvard (1985), *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Boston, Pitman.

[27] D. Ginbarg, N. Trudinger (1983), *Elliptic Partial Differential Equation of Second Order*, Springer -Verlag, Berlin - New York.

[28] F. Huang (1985), "On the Holomorphic Property of the Semigrou Associated with Linear Elastic Systems with Structural Damping", Acta Math. Sci. (Chinese) 5 pp.271-277.

[29] F. Huang (1986), "A Problem for Linear Elastic Systems with Structural Damping", Acta Math. Sci Sinic. 6 pp.107-113.

[30] F. Huang (1988), "On the Mathematical Model for Linear Elastic Systems with Analytic Damping", SIAM, J. Cont, Opt. 26 pp.714-724.

[31] N. M. Hung (1998), "On the Smoothness of Solution of Dirichlet Problem for Hyperbolic Systems in Domains with Conical or Angular Points", DAN. 362(2), 161-164 161-164.

[32] N. M. Hung (1999), "Asymptotic Behaviour of Solutions to the First Boundary Value Problem for Strongly Hyperbolic Systems Near a Conical Point of the Boundary" Mat. Sb., V.190(1999), N7, 103-126.

[33] N. M. Hung (2007), "The First Initial Boundary Value Problem for Hyperbolic Equations in Infinite Cylinders with Nonsmooth Base" Journal of Science of Hanoi National University of Education Natural sciences, Vol. 52, Num. 4, pp. 13-22.

[34] N. M. Hung, C. T. Anh (2004), "On the Solvability of the First Initial Boundary Value Problem for Schrödinger Systems in Infinite Cylinders", *Vietnam J. Math.*, 32(1), pp. 41- 48.

[35] N. M. Hung, C. T. Anh (2005), "On the Smoothness of Solutions of the First Initial Boundary Value Problem for Schrödinger Systems in Domains with Conical Points", Vietnam J. Math., Vol. 33(2), pp. 135 - 147.

[36] N. M. Hung, N. T. Anh (2008), "Regularity of Solutions of Initial Boundary Value Problems for Parabolic Equations in Domains with Conical Points", J. Differential Equations Vol. 245, pp. 1801-1818.

[37] N. M. Hung, N. T. Anh (2013), "On Initial-Boundary Value Problems for Hyperbolic Equations in Domains with Conical Points," Hindawi Publishing Corporation, Abstract Applied Analysis, Vol. 2013, Art. ID 801314, 10 p.

[38] N. M. Hung, P. T. Duong (2004), "On the Smoothness of Generalized Solution for Parabolic Systems in Domain with Conic Point on Boundary", Ucrainian Mathematical Journal. V.56(6): 857-864.

[39] N. M. Hung, P. T. Duong (2004), "On the Smoothness with Sespect to Time Variable of Generalized Solution with Respect to Time Variable of the First Initial Boundary-Value Problem for Strongly Parabolic Systems in the Cylinder with Non-Smooth Base", Ucrainian Mathematical Journal, Vol. 56(1), pp. 78-87.

[40] N. M. Hung, T. T. Loan (2004), "On the Asymptotic Behaviour of Solutions of the First Initial Boundary Value Problems for Parabolic Equation", Ukrain. Math. Zh. Vol. 54 (12), pp. 2080-2087.

[41] N. M. Hung, V. T. Luong (2008), "Unique Solvability of Initial Boundary-Value Problems for Hyperbolic Systems in Cylinders Whose Base is a Cusp Domain", Electron. J. Diff. Eqns., Vol. 2008 No. 138, pp. 1-10.

[42] N. M. Hung, V. T. Luong (2009), "Regularity of the Solution of the First Initial-Boundary Value Problem for Hyperbolic Equations in Domains with Cuspidal Points on Boundary", Hindawi Publishing Conrporations, Boundary Value Problems, Volume 2009, Article ID 135730, 14 pages.

[43] N. M. Hung, J. C. Yao (2009), "Cauchy-Dirichlet Problem for Second-Order Hyperbolic Equations in Cylinder with Non-Smooth Base", Nonlinear Anal.T MA70, 741-756.

[44] N. M. Hung, J. C. Yao (2009), "On the Asymptotic of Solutions of the First Initial Boundary Value Problem for Hyperbolic Systems in Infinite Cylinders with Base Containing Conical Points", Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Volume 71, Issues 5-6, pp. 1620-1635.

[45] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca (2001), *Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces,* Walter de Gruyter · Berlin · New York.

[46] B. T. Kim, N. M. Hung (2008), "On the Solvability of the First Mixed Problem for Strongly Hyperbolic System in Infinite Nonsmooth Cylinders", Taiwanese Journal of Mathematics, Vol. 12, No. 9, pp. 2601-2618.

[47] V. A. Kondrat'ev (1967), "Boundary-Value Problems for Elliptic Equations in Domains with Conic or Corner Points", Trudy Moskov. Mat. Obshch. 16, 209-292. Trans. Moscow Math. Soc. 1967, 227-313.

[48] V.A. Kondrat'ev (1970), "On the Smoothness of the Solution of the Dirichlet Problem for Second Order Elliptic Equations in Peecewise Smooth Domain", Differ. Uravn. 6 1831-1843. (in Russian); English transl: Differential Equations 6 (1970), 1392-1401.

[49] V. A. Kondrat'ev (1977), "Singgularities of the Solution of the Dirichlet Problem for a Second Order Elliptic Equation in a Neighborhood

of Edge", Differentsial'nye Uravneniya, 13(1977), pp. 2026-2032. Differential Equations 13(1977), pp. 1411-1415.

[50] V. A. Kondrat'ev (1998), "On the Smoothness of the Solution of the Dirichlet Problem for Second Order Elliptic Equations in a Piecewise Smooth Domain", Russian Mathematical Surveys, Volume 53, Number 2.

[51] V. A. Kozlov, V.G. Maz'ya, J. Rossmann (1997), *Elliptic Boundary Value Problems in Domains with Point Singularities,* Mathematical surveys and monographs, Amer. Math. Soc. Vol. 52, 414pp.

[52] V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya (1988), "Spectral Properties of the Operator Bundles Generated by Elliptic Boundary-Value Problems in a Cone", Functional Analysis and Its Applications, Volume 22, Issue 2, pp. 114-121.

[53] V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya and J. Rossmann (2001), *Spectral Problems Associated with Corner Singularities of Solutions to Elliptic Equations*, Mathematical Surveys and Monographs, Amer. Math. Soc. Vol. 85.

[54] J. L. Lions (1969), *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires,* Dunod−Gauthier−Villard. Paris.

[55] Y. Louartassi, El. Hossine, El. Mazoudi, N. Elalami (2012), "A New Generalization of Lemma Gronwall-Bellman", Applied Mathematical Sciences, Vol. 6, No. 13, 621 - 628

[56] S. Lubkin (2003), C_0-*Semigroups and Applicaltions,* North-Holland Mathematics Sudies 191.

[57] V. T. Luong, D. V. Loi (2011), "Initial Boundary Value Problems for Second Order Parabolic Systems in Cylinders with Polyhedral Base", Boundary Value Problems 2011, **2011**:56.

[58] V. T. Luong, N. T. Hue (2014), "On the Asymptotic of Solution to the Dirichlet Problem for Hyperbolic Equations in Cylinders with Edges", Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., No. 10, pp. 1-15.

[59] A. Matsumura (1977), "Global Existence and Asymptotics of the Solutions of the Second Order Quasilinear Hyperbolic Equations with the First Order Dissipation", Publ. RIMS, Hyoto Univ. 13, pp 349-379.

[60] V. G. Maz'ya, J. Rossmann (2010), *Elliptic Equations in Polyhedral Domains*, Mathematical Surveys and Monographs **162**, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island.

[61] F. A. Mehmeti, S. Nicaise (1998), "Non−Autonomous Evollution Equations on Nonsmooth Domains", Math. Nachr. Vol. 192, pp. 37-70

[62] A. Milani, Y. Shibata (1995), "On the Strong Well-Posedness of Quasilinear Hyperbolic Initial-Boundary Value Problems", Funkcialaj Ekvacioj 38 pp.491-503.

[63] A. Pazy (1983), *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential,* Springer, Berlin, Germany.

[64] L. E. Pay, D. H. Sattinger (1975), "Saddle Points and Instability of Nonlinear Hyperbolic Equations", Israel. J. Math. Vol. 22, pp. 273-303.

[65] M. Renardy, R. C. Rogers (2004), *An Introduction to Partial Differential Equations,* Springer Verlag New York, Inc. Second edition, With 41 Illustrations, Series: Texts in Applied Mathematics, Vol. 13.

[66] D.H. Sattinger (1968), "On Global Solution of Nonlinear Hyperbolic Equations", Arch. Rat. Mech. Anal. Vol. 30, pp. 148-172.